

ΠΑΝΤΕΙΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES



ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ «ΔΗΜΟΣΙΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗ»
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ «ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ»

Κατανομή Ιδιοτιμών και Βαθμός Κανονικότητας – Ελεγκσιμότητας
των Πραγματικών Οικονομιών: Ευρήματα από την WIOD 2000-2014

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Παναγιώτης Γ. Βελτσίστας

Αθήνα, 2019

Τριμελής Επιτροπή

Θεόδωρος Μαριόλης, Καθηγητής Παντείου Πανεπιστημίου (Επιβλέπων)

Χαράλαμπος Οικονομίδης, Ομότιμος Καθηγητής Παντείου Πανεπιστημίου

Νικόλαος Ροδουσάκης, Ερευνητής Κέντρου Προγραμματισμού & Οικονομικών Ερευνών (ΚΕΠΕ)



Copyright © Παναγιώτης Γ. Βελτισίτας, 2019

All rights reserved. Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας διπλωματικής εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της διπλωματικής εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Πάντειο Πανεπιστήμιο Κοινωνικών και Πολιτικών Επιστημών δεν δηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

Στην οικογένειά μου

Ευχαριστίες

“I believe that there is no economic reason why real systems should not be regular or why irregular systems should exist in reality; irregularity is only a fluke or, at best, an approximation.”

Bertram Schefold, *Relative Prices as a Function of the Rate of Profit: A Mathematical Note* (1976)

Ολοκληρώνοντας τον κύκλο των μεταπτυχιακών σπουδών μου αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω *ab imo pectore* τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Θεόδωρο Μαριόλη, για τη συνεχή ενθάρρυνση και καθοδήγησή του. Η συγγραφή της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα ήταν, αν μη τι άλλο, αδύνατη χωρίς την ανεκτίμητη συμβολή του. Η αδιάκοπη βοήθειά του καθώς και ο τρόπος προσέγγισης και αντιμετώπισης όλων των ζητημάτων που προέκυπταν κατά τη διάρκεια της συγγραφής της παρούσης αποτέλεσε για εμένα πολύτιμο οδηγό στην επιστημονική έρευνα. Οι μακροσκελείς συζητήσεις μας γύρω από όλα τα ζητήματα, λειτούργησαν καθοριστικά για την ολοκλήρωση της εργασίας. Η εμπιστοσύνη που μου έδειξε αποτελεί για εμένα μεγάλη τιμή και οι γνώσεις που μου μετέδωσε συγκροτούν ένα σημαντικό εφόδιο για την μετέπειτα πορεία μου. Ο κ. Μαριόλης είναι για μένα όχι μόνον ένας καθηγητής, αλλά ό,τι ήταν ο ποιητής Βιργίλιος για τον Dante: «Σὺ ὁδηγός, σὺ κύριος, σὺ καὶ διδάσκαλός μου.».

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους διδάσκοντες του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών και τους καθηγητές του Τμήματος Δημόσιας Διοίκησης για την άψογη συνεργασία μας όλα αυτά τα χρόνια.

Τέλος, το μεγαλύτερο ευχαριστώ ανήκει στην οικογένειά μου, στους υπέροχους γονείς μου και στα αδέρφια μου, ιδιαίτερα στην Αναστασία και στο Μιχάλη, για την αδιάκοπη στήριξη και αγάπη τους σε όλη τη διάρκεια των προπτυχιακών και μεταπτυχιακών σπουδών μου, σε περιόδους που όλα μοιάζανε ακατόρθωτα.

Περιεχόμενα

Περίληψη	7
Abstract.....	8
Εισαγωγή	9
Κεφάλαιο 1 ^ο Το Θεωρητικό Πλαίσιο	12
1.1 Εισαγωγή.....	12
1.2 Η σχέση τιμών παραγωγής-εργασιακών αξιών στο πλαίσιο του συνήθους υποδείγματος απλής παραγωγής	13
1.3 Σχετικά με τις έννοιες «ελεγχιμότητα» και «κανονικότητα» των συστημάτων	16
1.4 Η μήτρα κανονικότητας-ελεγχιμότητας (Krylov) των οικονομιών	17
1.5 Φασματική αναπαράσταση της μήτρας J	18
1.6 Θεωρίες της Αξίας.....	20
1.7 «Διαταράσσοντας» την Καθαρά Εργασιακή Θεωρία της Αξίας	21
1.8 Η θέση των πολικών θεωριών της αξίας στο μιγαδικό επίπεδο.....	26
Κεφάλαιο 2 ^ο Εμπειρική Διερεύνηση	28
2.1 Εισαγωγή.....	28
2.2 Επεξεργασία εμπειρικών δεδομένων	28
2.3 Παρουσίαση αποτελεσμάτων	30
2.4 Συμπεράσματα Εμπειρικής Διερεύνησης.....	37
Συμπερασματικές Παρατηρήσεις.....	38
Αναφορές	39
Παράρτημα Α. Σχετικά με τα δεδομένα	41
Παράρτημα Β. Τα μέτρα των ιδιοτιμών των μητρών J	46
Παράρτημα Γ. Παράθεση Αποτελεσμάτων	68

Σχήματα

Σχήμα 1. Η θέση των πολικών θεωριών της αξίας στο μιγαδικό επίπεδο	26
Σχήμα 2. Η θέση των ιδιοτιμών των μητρών J στο μιγαδικό επίπεδο: Όλες οι χώρες (43 χώρες) - 172 SIOTs	33
Σχήμα 3. Οι κανονικοποιημένες ιδιάζουσες τιμές όλων των μητρών Krylon (43 χώρες) - 172 SIOTs	33
Σχήμα 4. Η θέση των ιδιοτιμών των μητρών J στο μιγαδικό επίπεδο: Ευρωζώνη (19 χώρες) - 76 SIOTs	34
Σχήμα 5. Οι κανονικοποιημένες ιδιάζουσες τιμές των μητρών Krylon για την Ευρωζώνη (19 χώρες) - 76 SIOTs	34
Σχήμα 6. Η θέση των ιδιοτιμών των μητρών J στο μιγαδικό επίπεδο: G10 (11 χώρες) - 44 SIOTs	35
Σχήμα 7. Οι κανονικοποιημένες ιδιάζουσες τιμές των μητρών Krylon για την G10 (11 χώρες) - 44 SIOTs	35
Σχήμα 8. Η θέση των ιδιοτιμών των μητρών J στο μιγαδικό επίπεδο: Υπόλοιπος Κόσμος (18 χώρες) - 72 SIOTs	36
Σχήμα 9. Οι κανονικοποιημένες ιδιάζουσες τιμές των μητρών Krylon για τον Υπόλοιπο Κόσμο (18 χώρες) - 72 SIOTs	36

Πίνακες

Πίνακας 1. Ταξινόμηση Κλάδων	42
Πίνακας 2. Φασματικά χαρακτηριστικά και χαρακτηριστικά κανονικότητας των πραγματικών οικονομιών	68

Περίληψη

Η παρούσα εργασία διερευνά την κατανομή των ιδιοτιμών των μητρών των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών, καθώς και το «βαθμό κανονικότητας-ελεγκσιμότητας» των πραγματικών οικονομιών στη βάση της Σραφφαϊανής θεωρίας της αξίας. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιείται ένα γραμμικό μοντέλο απλής παραγωγής και κυκλοφορούντος κεφαλαίου, και δεδομένα από πίνακες εισροών-εκροών που αφορούν ένα μεγάλο και ποικίλο όγκο πραγματικών οικονομιών. Έτσι, υπολογίζονται οι ιδιοτιμές των μητρών των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών, και εκτιμώνται οι βαθμοί κανονικότητας-ελεγκσιμότητας και οι αριθμητικές τάξεις των μητρών κανονικότητας-ελεγκσιμότητας ή, αλλιώς, μητρών Kyglov. Επιπλέον, εκτίθεται η θεώρηση ότι οι διάφορες θεωρίες της αξίας αντιστοιχούν σε συγκεκριμένα σημεία στο μιγαδικό επίπεδο όπου εντοπίζονται οι ιδιοτιμές των μητρών των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών. Τέλος, συμπεραίνεται ότι οι οικονομίες του πραγματικού κόσμου συγκροτούν «σχεδόν μη κανονικά-μη ελέγξιμα συστήματα» και ότι η Σραφφαϊανή θεωρία της αξίας παρέχει την πλέον γενική, έως σήμερα, βάση για την ανάλυση αυτών των οικονομιών σε όρους τιμών-κατανομής εισοδήματος.

Λέξεις-κλειδιά: Αριθμητική τάξη μήτρας, Βαθμός κανονικότητας-ελεγκσιμότητας, Κάθετη ολοκλήρωση, Κατανομή ιδιοτιμών, Σραφφαϊανή Θεωρία

Eigenvalue Distribution and the Degree of Regularity-Controllability of Actual Economies: Evidence from the WIOD 2000-2014

Panagiotis G. Veltsistas

Abstract

Based on the Sraffian value theory, this thesis investigates the eigenvalue distribution of the vertically integrated technical coefficients matrices and the “degree of regularity-controllability” of actual economies. For this purpose, it is used a linear model of single production, circulating capital and input-output data for a large number of quite diverse actual economies. Thus, the eigenvalues of the vertically integrated technical coefficients matrices are computed, and the degrees of regularity-controllability and the numerical ranks of the regularity-controllability matrices or, alternatively, Krylov matrices are estimated. In addition, it is considered that the various theories of value correspond to specific complex plane locations of the eigenvalues of the vertically integrated technical coefficients matrices. Finally, it is concluded that real-world economies constitute “almost irregular-uncontrollable systems” and that the Sraffian value theory is the most general to date for analyzing these economies in terms of values and income distribution.

Keywords: Degree of regularity-controllability, Eigenvalue distribution, Numerical matrix rank, Sraffian theory, Vertical integration

Εισαγωγή

Παρά τις σημαντικές εννοιολογικές διαφορές τους, όλες οι παραδοσιακές θεωρίες της αξίας (κλασική, Μαρξική, Αυστριακή, νεοκλασική) ανάγονται στην ύπαρξη μιας αμφιμονοσήμαντης σχέσης μεταξύ της κίνησης των μακροχρόνιων σχετικών τιμών δύο εμπορευμάτων ως αποτέλεσμα μεταβολής στην κατανομή του εισοδήματος, και στη διαφορά της έντασης κεφαλαίου ανάμεσα στους κλάδους που παράγουν τα εν λόγω εμπορεύματα. Ωστόσο, το 1960, ο Sraffa απέδειξε ότι μια τέτοια σχέση δεν υφίσταται απαραίτητως. Ειδικότερα, απέδειξε ότι, ακόμα και σε μια οικονομία σταθερών τεχνικών συντελεστών και τουλάχιστον τριών βασικών εμπορευμάτων, οι σχετικές τιμές των εμπορευμάτων δύνανται να αντιδρούν πολύπλοκα στις μεταβολές της κατανομής του εισοδήματος και, έτσι, η κατεύθυνση της κίνησής τους δεν μπορεί να είναι *a priori* γνωστή¹. Ο λόγος είναι ότι οι μεταβολές στην κατανομή του εισοδήματος προκαλούν παράγωγες μεταβολές στις τιμές των μέσων παραγωγής, πράγμα που συνεπάγεται ότι η κατεύθυνση της κίνησης των σχετικών τιμών των εμπορευμάτων, συναρτήσει του ποσοστού κέρδους ή του ωρομισθίου, δεν καθορίζεται μόνο από τις διαφορές στις σχετικές εντάσεις κεφαλαίου, αλλά και από μεταβολή των σχετικών εντάσεων κεφαλαίου που προκύπτουν από τις αλλαγές στις σχετικές τιμές των εμπορευμάτων.

Το σραφφαϊανό σύστημα τιμών εμπορευμάτων-χρηματικού ωρομισθίου-ποσοστού κέρδους έχει διερευνηθεί εμπειρικά σε έναν μεγάλο όγκο μελετών, καθώς και για μεγάλο εύρος χρονικών περιόδων και ποικίλων οικονομιών. Τα βασικά ευρήματα (*τυποποιημένα γεγονότα*²) αυτών των μελετών συνοψίζονται κάτωθι³.

Πρώτον, παρατηρούνται μη-μονότονες καμπύλες τιμών εμπορευμάτων. Εντούτοις, δεν ξεπερνούν το 20% των εξεταζόμενων περιπτώσεων, ενώ, όταν χρησιμοποιείται ως *numéraire* το Πρότυπο Εμπόρευμα του Sraffa (1960), δεν εμφανίζουν περισσότερα από ένα σημείο αλλαγής μονοτονίας. Οι περιπτώσεις κατά τις οποίες σημειώνεται αλλαγή στη σχέση διάταξης τιμών παραγωγής-εργασιακών αξιών είναι σπανιότερες, δηλαδή αισθητά μικρότερες του 20%.

Δεύτερον, παρά την ύπαρξη σημαντικών διαφοροποιήσεων από την περίπτωση των «διακλαδικά ίσων αξιακών συνθέσεων (ή εντάσεων) του κεφαλαίου» (Ricardo-

¹ Για μια αναλυτική παρουσίαση των εν λόγω ζητημάτων βλ. π.χ. Tsoulfidis & Mariolis (2007), Mariolis & Tsoulfidis (2016a, 2016b και 2018).

² Τα τυποποιημένα γεγονότα (*stylized facts*) αποτελούν απλουστευμένες παρουσιάσεις εμπειρικών ευρημάτων που επιβεβαιώνονται τόσο συχνά και, επομένως, μπορούν να θεωρηθούν ως προφανείς εμπειρικές αλήθειες.

³ Για μια αναλυτική παρουσίαση βλ. Mariolis and Tsoulfidis (2016a) και τις εκεί αναφορές.

Marx-Dmitriev-Samuelson), οι καμπύλες ωρομισθίου-ποσοστού κέρδους είναι σχεδόν γραμμικές, δηλαδή οι συντελεστές συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών τείνουν να είναι μεγαλύτεροι από 99%. Επίσης, η δεύτερη παράγωγός τους δεν αλλάζει πρόσημο περισσότερο από μία φορά ή, σπανιότερα, δύο φορές, ανεξάρτητα από το επιλεγμένο *numéraire*.

Τρίτον, η προσέγγιση των καμπυλών τιμών εμπορευμάτων-χρηματικού ωρομισθίου-ποσοστού κέρδους μέσω πολυωνυμικών εξισώσεων χαμηλής τάξης (δηλαδή, γραμμικών ή, *a fortiori*, τετραγωνικών) είναι ικανοποιητική, από καθαρά ποσοτική άποψη.

Τέταρτον, τέλος, τα προαναφερθέντα σχήματα των καμπυλών τιμών εμπορευμάτων-χρηματικού ωρομισθίου-ποσοστού κέρδους μπορούν να ερμηνευθούν από το γεγονός ότι, για όλες τις χώρες και κατά την πάροδο του χρόνου, τόσο τα μέτρα των αρχικών μη-δεσποζουσών ιδιοτιμών όσο και οι αρχικές μη-δεσπόζουσες ιδιάζουσες τιμές των μητρών των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών μειώνονται μάλλον απότομα, ενώ παράλληλα υπάρχει πολύ μεγάλη συγκέντρωση αυτών των χαρακτηριστικών τιμών σε τιμές κοντά στο μηδέν.

Ακολουθώντας την εισαχθείσα από τους Θεόδωρο Μαριόλη και Λευτέρη Τσουλφίδη ερευνητική μεθοδολογία, η οποία συνδυάζει τη Σραφφαϊανή ανάλυση με τη φασματική αναπαράσταση των γραμμικών συστημάτων, η παρούσα εργασία διερευνά: (i) την κατανομή των ιδιοτιμών των μητρών των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών, (ii) το «βαθμό κανονικότητας-ελεγχιμότητας» των πραγματικών οικονομιών, (iii) τις ιδιάζουσες τιμές των μητρών κανονικότητας-ελεγχιμότητας και, τέλος, (iv) τις αριθμητικές τάξεις των μητρών κανονικότητας-ελεγχιμότητας.

Στο Κεφάλαιο 1 αναπτύσσεται το θεωρητικό πλαίσιο στη βάση του οποίου πραγματοποιείται η παρούσα μελέτη και στο Κεφάλαιο 2 αναπτύσσονται και αναλύονται τα εμπειρικά αποτελέσματα. Για την εμπειρική διερεύνηση χρησιμοποιήθηκαν, από τη βάση δεδομένων WIOD, πίνακες εισροών-εκροών που αφορούν συνολικά σάραντα τρεις οικονομίες. Κάθε οικονομία εξετάστηκε για τέσσερα έτη, και συγκεκριμένα για τα έτη 2000, 2005, 2010 και 2014. Για κάθε έτος και κάθε οικονομία εξετάστηκαν η κατανομή των ιδιοτιμών των κανονικοποιημένων μητρών των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών και οι ιδιάζουσες τιμές αυτών των μητρών (ο λόγος της τελευταίας ως προς την πρώτη ιδιάζουσα τιμή), το μέτρο της ορίζουσας των μητρών $Krylov$, οι αριθμητικές τάξεις αυτών των μητρών, καθώς και ο βαθμός κανονικότητας-ελεγχιμότητας. Εν κατακλείδι, επιβεβαιώνεται το προσφάτως ανεπτυγμένο

στη βιβλιογραφία (Mariolis & Tsoulfidis, 2018 και Mariolis, 2019) συμπέρασμα ότι, οι πραγματικές οικονομίες τείνουν να συμπεριφέρονται ως «μη κανονικά-μη ελέγξιμα συστήματα».

Κεφάλαιο 1^ο Το Θεωρητικό Πλαίσιο

1.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο⁴ αναλύεται το θεωρητικό πλαίσιο στη βάση του οποίου πραγματοποιείται η παρούσα μελέτη. Παρουσιάζεται το υπόδειγμα, το οποίο τοποθετείται στη βάση της Στραφαιϊανής θεωρίας, καθώς και οι κύριες υποθέσεις του. Υποθέτουμε ένα κλειστό, γραμμικό σύστημα απλής παραγωγής⁵ (*single production*) και κυκλοφορούντος κεφαλαίου⁶, το οποίο παράγει n βασικά εμπορεύματα⁷ (*basic products*, σύμφωνα με τον Sraffa, 1960, pp. 7-8, § 6). Επιπλέον, θεωρούμε ότι (i) οι τεχνικοί συντελεστές είναι δεδομένοι, (ii) το οικονομικό σύστημα είναι κερδοφόρο ή, ισοδύναμα, βιώσιμο, (iii) η τιμή του εμπορεύματος που παράγεται ως εκροή στο τέλος της περιόδου παραγωγής είναι ίδια με την τιμή του εμπορεύματος που χρησιμοποιήθηκε ως εισροή στην αρχή της περιόδου παραγωγής, (iv) το καθαρό προϊόν κατανέμεται σε μισθούς (οι οποίοι καταβάλλονται *ex post*) και κέρδη, και τέλος (v) το ποσοστό κέρδους και το χρηματικό ωρομίσθιο είναι ενιαία (Mariolis & Tsoulfidis, 2016, pp. 15-16 και Μαριόλης, 2012, σ. 239).

Το υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου δομείται ως εξής. Αρχικά γίνεται αναλυτική περιγραφή του συστήματος τιμών στη βάση του οποίου πραγματοποιείται και αναλύεται η εμπειρική μελέτη. Εν συνεχεία, περιγράφονται οι έννοιες της ελεγχιμότητας (*controllability*) και της κανονικότητας (*regularity*) των συστημάτων και η εφαρμογή τους σε οικονομικά συστήματα. Τέλος, γίνεται ειδική αναφορά στις θεωρίες της αξίας, καθώς και στις διάφορες περιπτώσεις που δύνανται να παραχθούν μέσω «διαταράξεων (*perturbations*)» της «καθαρά εργασιακής θεωρίας της αξίας».

⁴ Το Κεφάλαιο 1 στηρίζεται στα Mariolis & Tsoulfidis (2018) και Mariolis (2019).

⁵ Απλή παραγωγή έχουμε όταν κάθε κλάδος του υπό θεώρηση συστήματος παράγει ένα, και μοναδικό, ομοιογενές εμπόρευμα.

⁶ Θεωρούμε μια τεχνική παραγωγής η οποία απαιτεί μόνον κυκλοφορούντα κεφαλαιουχικά αγαθά (*circulating capital goods*), δηλαδή κεφάλαιο το οποίο φθείρεται πλήρως εντός της περιόδου παραγωγής.

⁷ Βασικά είναι τα εμπορεύματα εκείνα τα οποία εισέρχονται άμεσα ή έμμεσα στην παραγωγή όλων των εμπορευμάτων.

1.2 Η σχέση τιμών παραγωγής-εργασιακών αξιών στο πλαίσιο του συνήθους υποδείγματος απλής παραγωγής

Στη βάση των υποθέσεων που ελέχθησαν, δυνάμεθα να προσδιορίσουμε τις τιμές ισορροπίας του οικονομικού συστήματος, ήτοι⁸

$$\mathbf{p}^T = w\mathbf{l}^T + (1+r)\mathbf{p}^T\mathbf{A} \quad (1)$$

όπου \mathbf{p}^T είναι το $1 \times n$ διάνυσμα των τιμών παραγωγής, w το ενιαίο χρηματικό ωρομίσθιο, r το ενιαίο ποσοστό κέρδους, \mathbf{l}^T το $1 \times n$ διάνυσμα των εισροών σε άμεση εργασία, και \mathbf{A} η μη διασπώμενη⁹ (*irreducible*) $n \times n$ μήτρα των τεχνικών συντελεστών, με $\lambda_{A1} < 1$, δεδομένου ότι το οικονομικό σύστημα θεωρείται βιώσιμο.

Βάσει της εξίσωσης (1) μπορούμε να εκφράσουμε τις τιμές παραγωγής συναρτήσει των εργασιακών αξιών των εμπορευμάτων, δηλαδή

$$\mathbf{p}^T[\mathbf{I} - \mathbf{A}] = w\mathbf{l}^T + r\mathbf{p}^T\mathbf{A}$$

ή

$$\mathbf{p}^T = w\mathbf{v}^T + r\mathbf{p}^T\mathbf{H} \quad (2)$$

ή, τέλος, για $r = \rho R$,

$$\mathbf{p}^T = w\mathbf{v}^T + \rho\mathbf{p}^T\mathbf{J} \quad (3)$$

όπου $\mathbf{v}^T \equiv [v_i] \equiv \mathbf{l}^T[\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ είναι το διάνυσμα¹⁰ των «ενσωματωμένων» ποσοτήτων εργασίας, δηλαδή των εργασιακών αξιών (σύμφωνα με την παραδοσιακή αντίληψη), και $\mathbf{H} \equiv [\mathbf{h}_i] \equiv \mathbf{A}[\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} (= [\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{A}) (> \mathbf{0})$ είναι η μήτρα των καθέτως ολοκληρωμένων

⁸ Το ανάστροφο διάνυσμα ενός $n \times 1$ διανύσματος \mathbf{x} συμβολίζεται με \mathbf{x}^T (διάνυσμα γραμμή ή αριστερό διάνυσμα), και ο διαγώνιος πίνακας που αποτελείται από τα στοιχεία του \mathbf{x} συμβολίζεται με $\hat{\mathbf{x}}$. Επιπλέον, η τιμή λ_{A1} συμβολίζει την Perron-Frobenius (P-F) ιδιοτιμή της ημι-θετικής $n \times n$ μήτρας $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]$, και $(\mathbf{x}_{A1}, \mathbf{y}_{A1}^T)$ τα συνδεδεμένα με αυτή ιδιοδιανύσματα, καθώς, λ_{Ak} , με $k = 2, 3, \dots, n$ και $|\lambda_{A2}| \geq |\lambda_{A3}| \geq \dots \geq |\lambda_{An}|$ συμβολίζουν το μέτρο (*modulus*) των μη-δεσποζουσών (*non-dominant*) ιδιοτιμών, και $(\mathbf{x}_{Ak}, \mathbf{y}_{Ak}^T)$ τα συνδεδεμένα με αυτές ιδιοδιανύσματα. Τέλος, με $\mathbf{e} \equiv [1, 1, \dots, 1]^T$ συμβολίζεται το διάνυσμα-άθροισμα (*summation vector*), με \mathbf{e}_i το μοναδιαίο διάνυσμα (*unit vector*) στο οποίο το στοιχείο i ισούται με τη μονάδα, και με \mathbf{I} την $n \times n$ μοναδιαία μήτρα. Σημειώνεται ότι τα γράμματα (ή οι αριθμοί) με έντονη γραφή (**bold**) δηλώνουν μήτρες ή διανύσματα. Για την παρουσίαση των θεωρημάτων Perron-Frobenius βλ. Pasinetti (1977, pp. 267-276, Mathematical Appendix).

⁹ Η υπόθεση ότι η μήτρα \mathbf{A} είναι μη διασπώμενη ισοδυναμεί με την υπόθεση ότι όλα τα εμπορεύματα του οικονομικού συστήματος είναι βασικά.

¹⁰ Η μήτρα $[\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ είναι γνωστή ως «αντίστροφη μήτρα του Leontief», στην οποία η στήλη i περιλαμβάνει τα ετερογενή εμπορεύματα που απαιτούνται άμεσα και έμμεσα σε ολόκληρο το οικονομικό σύστημα προκειμένου να παραχθεί μία μονάδα του εμπορεύματος i ως τελικό προϊόν (βλ. π.χ. Miller & Blair, 2009, pp. 21,31-34).

τεχνικών συντελεστών¹¹ (Pasinetti, 1973). Επιπλέον, το μέγεθος $\rho \equiv rR^{-1}$, $0 \leq \rho \leq 1$, δηλώνει το σχετικό ποσοστό κέρδους, το οποίο ισούται με το μερίδιο των κερδών στο προϊόν στο Πρότυπο Σύστημα του Sraffa (Sraffian Standard System), και το μέγεθος $R \equiv \lambda_{A1}^{-1} - 1 = \lambda_{H1}^{-1}$ δηλώνει το μέγιστο δυνατό ποσοστό κέρδους (δηλαδή εκείνο το ποσοστό κέρδους το οποίο αντιστοιχεί σε μηδενικό χρηματικό ωρομίσθιο, $w = 0$, και θετικό διάνυσμα τιμών, $\mathbf{p}^T > \mathbf{0}$), το οποίο ισούται με το λόγο του καθαρού προϊόντος ως προς τα μέσα παραγωγής στο Πρότυπο Σύστημα (Sraffa, 1960, pp. 21-23, §§28-31). Τέλος, το μέγεθος $\mathbf{J} \equiv R\mathbf{H}$ είναι μια θετική μήτρα (η κανονικοποιημένη μήτρα των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών), της οποίας η P-F ιδιοτιμή ισούται με 1, $\lambda_{J1} = R\lambda_{H1} = 1$ (όπως εξάγεται από τη σχέση (2) όταν θέσουμε $w = 0$), και οι απόλυτες τιμές των ιδιοτιμών της μήτρας \mathbf{J} (του συστήματος (2)) είναι μικρότερες από αυτών της μήτρας \mathbf{A} (του συστήματος (1)), δηλαδή ισχύει $|\lambda_{Jk}| < |\lambda_{Ak}| \lambda_{A1}^{-1}$ (Mariolis & Tsoulfidis, 2016, p. 22).

Αν επιλέξουμε ως *numéraire* το Πρότυπο Εμπόρευμα του Sraffa (Sraffa's Standard Commodity), δηλαδή εάν $\mathbf{p}^T \mathbf{z} = 1$, όπου $\mathbf{z} = [\mathbf{I} - \mathbf{A}] \mathbf{x}_{A1}$ και $\mathbf{I}^T \mathbf{x}_{A1} = 1$, τότε η εξίσωση (1) συνεπάγεται ότι η «καμπύλη χρηματικού ωρομισθίου-ποσοστού κέρδους» είναι γραμμική¹²

$$w = 1 - \rho \quad (4)$$

με $w(0) = 1$ και $w(1) = 0$. Αντικαθιστώντας την εξίσωση (4) στην εξίσωση (3), λαμβάνουμε

$$\mathbf{p}^T = (1 - \rho) \mathbf{v}^T + \rho \mathbf{p}^T \mathbf{J} \quad (5)$$

ή,

$$\mathbf{p}^T = (1 - \rho) \mathbf{v}^T [\mathbf{I} - \rho \mathbf{J}]^{-1}$$

ή, για $\rho < 1$,

¹¹ Σύμφωνα με τον Pasinetti (1973), κάθε συντελεστής v_i εκφράζει την ποσότητα εργασίας που απαιτείται άμεσα και έμμεσα σε ολόκληρο το οικονομικό σύστημα προκειμένου να παραχθεί μία μονάδα του εμπορεύματος i ως τελικό προϊόν. Καλούμε τον εν λόγω συντελεστή *καθέτως ολοκληρωμένο συντελεστή εργασίας* για το εμπόρευμα i . Ομοίως, κάθε στήλη του διανύσματος \mathbf{h}_i εκφράζει τη σειρά των ετερογενών ποσοτήτων των εμπορευμάτων $1, 2, \dots, n$, τα οποία απαιτούνται άμεσα και έμμεσα προκειμένου να παραχθεί μία μονάδα του εμπορεύματος i ως τελικό προϊόν. Το βαθμωτό v_i και το διάνυσμα \mathbf{h}_i , αποτελούν, μαζί, αυτό που εδώ καλούμε *καθέτως ολοκληρωμένο κλάδο* για την παραγωγή του εμπορεύματος i .

¹² Ως γνωστόν, όταν όλοι οι μισθοί καταβάλλονται *ex ante*, τότε η καμπύλη «χρηματικού ωρομισθίου-ποσοστού κέρδους» παύει να είναι γραμμική, ήτοι

$$w = (1 + r)^{-1} (1 - rR^{-1}) = (1 + r)^{-1} (1 - \rho) \quad (4a).$$

$$\mathbf{p}^T = (1-\rho)\mathbf{v}^T[\mathbf{I} + \rho\mathbf{J} + (\rho\mathbf{J})^2 + (\rho\mathbf{J})^3 + \dots] \quad (6)$$

όπου δίνονται οι τιμές των εμπορευμάτων, εκφρασμένες σε όρους του Πρότυπου Εμπορεύματος, ως πολυωνυμική συνάρτηση του σχετικού ποσοστού κέρδους, ρ , και η μήτρα $\rho\mathbf{J}$ είναι, ως γνωστόν, συγκλίνουσα, ήτοι

$$(\rho\mathbf{J})^k \rightarrow \mathbf{0}, \text{ για } k \rightarrow +\infty.$$

Η εξίσωση (5) υποδηλώνει ότι η τιμή του εμπορεύματος i , p_i , είναι κυρτός συνδυασμός της εργασιακής αξίας του εμπορεύματος i , v_i , και του μεγέθους $\mathbf{p}^T \mathbf{J} \mathbf{e}_i$, όπου το τελευταίο ισούται με το λόγο των μέσων παραγωγής στον καθέτως ολοκληρωμένο τομέα παραγωγής του εμπορεύματος i προς τα μέσα παραγωγής στο Πρότυπο Σύστημα. Από τις εξισώσεις (1)-(6) συμπεραίνονται τα εξής:

(i). Δεδομένου ότι $\mathbf{I} + \mathbf{H} = [\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$, έπεται ότι στην μη οικονομικά σημαντική τιμή $r = -1$ ισχύει $\mathbf{p}^T = \mathbf{I}^T$, δηλαδή οι τιμές είναι ανάλογες των ποσοτήτων άμεσης εργασίας.

(ii). Για $\rho = 0$ συνεπάγεται ότι $w = 1$ και $\mathbf{p}^T = \mathbf{v}^T$, δηλαδή ισχύει η «εργασιακή θεωρία της αξίας», ήτοι οι τιμές είναι ανάλογες των ποσοτήτων άμεσης και έμμεσης εργασίας.

(iii). Κάθε στοιχείο του διανύσματος \mathbf{p}^T συνιστά θετική, γνησίως αύξουσα και κυρτή συνάρτηση του σχετικού ποσοστού κέρδους, η οποία τείνει στο $+\infty$ για $\rho \rightarrow 1$.

(iv). Για $\rho = 1$ προκύπτει ότι $w = 0$, δηλαδή ισχύει, σύμφωνα με τον Pasinetti (1991), η «κεφαλαιουχική θεωρία της αξίας»¹³, ήτοι οι τιμές είναι ανάλογες των τιμών των μέσων παραγωγής. Επιπλέον για $\rho = 1$, το \mathbf{p}^T συνιστά αριστερό P-F ιδιοδιάνυσμα της μήτρας \mathbf{J} , εκφρασμένο σε όρους του Πρότυπου Εμπορεύματος, δηλαδή

$$\mathbf{p}^T(1) = (\mathbf{y}_{J1}^T \mathbf{z})^{-1} \mathbf{y}_{J1}^T = (\mathbf{y}_{J1}^T [\mathbf{I} - \mathbf{A}] \mathbf{x}_{A1})^{-1} \mathbf{y}_{J1}^T$$

ή, εφόσον ισχύει $[\mathbf{I} - \mathbf{A}] \mathbf{x}_{A1}^T = (1 - \lambda_{A1}) \mathbf{x}_{A1}^T$, και επειδή οι μήτρες \mathbf{A} και \mathbf{J} έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα, λαμβάνουμε

$$\mathbf{p}^T(1) = [(1 - \lambda_{A1}) \mathbf{y}_{J1}^T \mathbf{x}_{J1}]^{-1} \mathbf{y}_{J1}^T \quad (7).$$

(v). Εξαιρώντας την τετριμμένη και μη ρεαλιστική περίπτωση των ίσων αξιακών συνθέσεων του κεφαλαίου όπου $\mathbf{p}^T(0) = \mathbf{p}^T(1) = \mathbf{v}^T$ (συνεπώς, οι τιμές είναι σταθερές και

¹³ Οι δύο «πολικές θεωρίες της αξίας» (εργασιακή και κεφαλαιουχική) ισχύουν ταυτοχρόνως όταν και μόνον όταν $w\mathbf{v}^T = (1+R)w\mathbf{v}^T \mathbf{A}$ ή, ισοδυνάμως, $\mathbf{I}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}^T \lambda_{A1}$.

ίσεις με τις εργασιακές τους αξίες), όπως και την περίπτωση του διτομεακού συστήματος, όπου οι καμπύλες τιμών εμπορευμάτων-ποσοστού κέρδους είναι κατανάγκη μονότονες, οι αλλαγές στην κατανομή του εισοδήματος δύνανται να έχουν πολύπλοκες αναδραστικές επιπτώσεις στις τιμές των μέσων παραγωγής, πράγμα που συνεπάγεται ότι η κατεύθυνση της κίνησης των σχετικών τιμών των εμπορευμάτων, συναρτήσει του ποσοστού κέρδους, δεν μπορεί να είναι *a priori* γνωστή.

1.3 Σχετικά με τις έννοιες «ελεγχιμότητα» και «κανονικότητα» των συστημάτων

Έστω το ακόλουθο σύστημα¹⁴ (Luenberger, 1979, pp. 276-278),

$$\mathbf{v}_{t+1}^T = \mathbf{v}_t^T \mathbf{A} + u_t \mathbf{I}^T, \quad t = 1, 2, \dots \quad (8\alpha)$$

όπου \mathbf{v}_t^T είναι το πραγματικό $1 \times n$ διάνυσμα κατάστασης του συστήματος, \mathbf{A} η πραγματική, σταθερή, $n \times n$ μήτρα του συστήματος (γνωστή ως «plant coefficient matrix»), u_t η εισροή του συστήματος, η οποία συνιστά μια βαθμωτή συνάρτηση του χρόνου (γνωστή και ως «one-dimensional control vector») και \mathbf{I}^T ένα πραγματικό σταθερό, $1 \times n$ διάνυσμα.

Το σύστημα (8α) καλείται πλήρως ελέγξιμο εάν η αρχική κατάσταση $\mathbf{v}^T(0) = \mathbf{0}$ μπορεί να μεταφερθεί, μέσω της εισροής ελέγχου, u_t , σε κάθε τελική κατάσταση, εντός πεπερασμένου χρόνου. Ως εκ τούτου, η πλήρης ελεγχιμότητα του συστήματος αντιστοιχεί στην ικανότητα ελέγχου της κατάστασης του συστήματος. Το σύστημα διακριτού χρόνου (8α) είναι πλήρως ελέγξιμο¹⁵ (*completely controllable*) εάν και μόνο εάν η $n \times n$ μήτρα ελεγχιμότητας ή, διαφορετικά, η μήτρα Krylov

$$\mathbf{L} \equiv [\mathbf{I}^T, \mathbf{I}^T \mathbf{A}, \mathbf{I}^T \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{I}^T \mathbf{A}^{n-1}]^T \quad (8\beta)$$

έχει τάξη (*rank*) ίση με τη διάσταση της μήτρα \mathbf{A} , δηλαδή n , ενώ σε αντίθετη περίπτωση το σύστημα καλείται μη ελέγξιμο (*uncontrollable*). Η κατάσταση κατά την οποία η μήτρα ελέγχου έχει τάξη ίση με n είναι ισοδύναμη με την υπόθεση ότι η μήτρα \mathbf{L} είναι μη ιδιάζουσα (*nonsingular*), δηλαδή η ορίζουσά της είναι διάφορη του μηδενός. Τέλος, η μήτρα (8β) είναι γνωστή και ως μήτρα κανονικότητας. Σε αυτή την περίπτωση, εάν

¹⁴ Η έννοια της «ελεγχιμότητας (*controllability*)» των συστημάτων εισήχθη, κατά πρώτον, από τον Kalman (1960), και η έννοια της «κανονικότητας (*regularity*)» των συστημάτων ή της τεχνικής παραγωγής εισήχθη, κατά πρώτον, από τον Schefold (1971).

¹⁵ Η έννοια της ελεγχιμότητας είναι ισοδύναμη της έννοιας της κανονικότητας (βλ. Μαριόλης, 2012, Δοκίμιο 9, σσ. 221-226, Θεώρημα 2.1.1 και Ορισμός 3.1).

η μήτρα (8β) έχει τάξη ίση με n , τότε η τεχνική $[\mathbf{A}, \mathbf{I}^T]$ καλείται κανονική (*regular*), ενώ σε αντίθετη περίπτωση καλείται μη κανονική (*irregular*).

1.4 Η μήτρα κανονικότητας-ελεγχιμότητας (Krylov) των οικονομιών

Μια οικονομία με n κλάδους παραγωγής εμπορευμάτων ονομάζεται «κανονική τάξης n » ή «πλήρως κανονική» όταν και μόνον όταν η $n \times n$ μήτρα Krylov

$$\mathbf{K} \equiv [\mathbf{p}(0), \mathbf{J}^T \mathbf{p}(0), \dots, (\mathbf{J}^T)^{n-1} \mathbf{p}(0)]^T$$

ή, εφόσον $\mathbf{p}^T(0) = \mathbf{v}^T$

$$\mathbf{K} \equiv [\mathbf{v}, \mathbf{J}^T \mathbf{v}, \dots, (\mathbf{J}^T)^{n-1} \mathbf{v}]^T \quad (9)$$

έχει τάξη ίση με n ή, ισοδύναμα, όταν και μόνον όταν το διάνυσμα $\mathbf{p}^T(0)$ δεν είναι ορθογώνιο σε κανένα (πραγματικό ή μιγαδικό) δεξιό ιδιοδιάνυσμα της μήτρας \mathbf{J} , δηλαδή όταν ισχύει $\mathbf{v}^T \mathbf{x}_{J_i} \neq 0$. Σε αυτή την περίπτωση, τα διανύσματα των τιμών των εμπορευμάτων που αντιστοιχούν σε οποιοσδήποτε n διακριτές τιμές του ποσοστού κέρδους είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (Bidard & Salvadori, 1995 και Kurz & Salvadori, 1995, chap. 6).

Εν αντιθέσει, όταν και μόνον όταν η μήτρα Krylov έχει βαθμό μικρότερο από n , έστω βαθμό m ($\text{rank}[\mathbf{K}] = m < n$), τότε λέγεται ότι η οικονομία είναι «μη κανονική», ή για την ακρίβεια ότι είναι «κανονική τάξης m ». Αυτό συνεπάγεται ότι, τα διανύσματα των τιμών των εμπορευμάτων που αντιστοιχούν σε οποιοσδήποτε $m+1$ διακριτές τιμές του ποσοστού κέρδους είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Στην περίπτωση όπου μία οικονομία είναι μη κανονική, η μήτρα Krylov είναι ιδιάζουσα (*singular*), και ως εκ τούτου, υπάρχει ένα διάνυσμα \mathbf{z}' τέτοιο ώστε $\mathbf{Kz}' = \mathbf{0}$ και, επομένως, $\mathbf{p}^T \mathbf{z}' = 0$. Συνεπώς, μια αλλαγή στο *numéraire* από \mathbf{z}' σε $\mathbf{z} + \zeta \mathbf{z}'$, όπου ζ είναι ένα βαθμωτό, δεν επηρεάζει το πραγματικό ωρομίσθιο και τις τιμές των εμπορευμάτων (Miyao, 1977). Όταν και μόνον όταν η διάσταση ενός ιδιοχώρου συνδεδεμένου με μία ιδιοτιμή της μήτρας \mathbf{J} είναι μεγαλύτερη από 1 ή, ισοδύναμα, όταν και μόνον όταν ικανοποιεί μία πολυωνυμική εξίσωση βαθμού μικρότερου του n , τότε η οικονομία είναι μη κανονική όποιο και αν είναι το διάνυσμα $\mathbf{p}^T(0)$ (Ford & Johnson, 1968).

Η έννοια της «κανονικότητας/μη κανονικότητας» είναι αλγεβρικά ισοδύναμη με την έννοια της «ελεγχιμότητας/μη ελεγχιμότητας» (Mariolis, 2003). Προκειμένου

να εξετασθεί η έννοια της ελεγχιμότητας των πραγματικών οικονομιών, ας θεωρήσουμε, κατά αντιστοιχία με την εξίσωση (8α), την ακόλουθη δυναμική εκδοχή του συστήματος τιμών

$$\mathbf{p}_{t+1}^T = w_t \mathbf{p}^T(0) + \bar{\rho} \mathbf{p}_t^T \mathbf{J}, \quad t = 0, 1, \dots$$

όπου το $\bar{\rho}$ θεωρείται εξωγενώς δεδομένο μέγεθος και δηλώνει το ονομαστικό σχετικό ποσοστό κέρδους, και $\mathbf{p}_0^T = \mathbf{0}$. Όταν και μόνον όταν $\text{rank}[\mathbf{K}] = n$, τότε το σύστημα καλείται «πλήρως ελέγξιμο», γεγονός το οποίο σημαίνει ότι η αρχική κατάσταση του συστήματος \mathbf{p}_0^T μπορεί να μεταφερθεί, μέσω του w_t , σε κάθε τελική κατάσταση εντός πεπερασμένου χρονικού διαστήματος.

Η προηγηθείσα ανάλυση παρέχει μόνον ένα κριτήριο για το αν οι οικονομίες είναι ή όχι πλήρως ελέγξιμες-κανονικές. Γενικά, στο σύνολο όλων των οικονομικών συστημάτων, τα μη ελέγξιμα και μη κανονικά συστήματα είναι εξαιρετικά σπάνια. Ως εκ τούτου, τα συστήματα είναι σχεδόν πάντα ελέγξιμα-κανονικά.

1.5 Φασματική αναπαράσταση της μήτρας \mathbf{J}

Τα εμπειρικά αποτελέσματα στις μελέτες στις οποίες χρησιμοποιείται το Πρότυπο Εμπόρευμα ως μέτρο των τιμών, δείχνουν ότι περίπου στο 80% των περιπτώσεων οι εμπορευματικές τιμές μεταβάλλονται μονοτονικά με το ποσοστό κέρδους. Το εν λόγω εύρημα δύναται να αναχθεί στην κατανομή των ιδιοτιμών των μητρών \mathbf{J} . Τα μέτρα των ιδιοτιμών των μητρών \mathbf{J} , που έχουν κατασκευαστεί με στοιχεία από πίνακες εισροών-εκροών πραγματικών οικονομιών, ακολουθούν τη μορφή υπερβολής, στην περίπτωση κυκλοφορούντος κεφαλαίου (όπως συμβαίνει στα πλαίσια της παρούσας μελέτης), και τη μορφή του γράμματος L (*L-shaped Form*) στην πιο πραγματοκρατική εκδοχή του παγίου κεφαλαίου.

Εξετάζοντας τις ιδιοτιμές των μητρών \mathbf{J} , μπορούμε να καταλήξουμε σε δύο βασικά τυποποιημένα γεγονότα. Πρώτον, ο μέσος όρος των μέτρων των μη-δεσποζουσών ιδιοτιμών είναι κατά πολύ μικρότερος της μονάδας¹⁶ και δεύτερον, εξαιτίας της μεγάλης διαφοράς ανάμεσα στην P-F ιδιοτιμή και στο μέτρο της υποδεσπόζουσας ιδιοτιμής των μητρών \mathbf{J} καθίσταται δυνατόν να πραγματοποιηθούν αρκετά ακριβείς προσεγγί-

¹⁶ Στα πλαίσια της παρούσας μελέτης, χρησιμοποιείται ο γεωμετρικός μέσος, διότι θεωρείται καταλληλότερος για την ανίχνευση της κεντρικής τάσης ενός συνόλου αριθμών οι οποίοι αυξάνονται ή μειώνονται εκθετικά.

σεις των τροχιών που ακολουθούν οι καμπύλες τιμών εμπορευμάτων-ποσοστού κέρδους μέσω φασματικών προσεγγίσεων χαμηλής τάξης (Mariolis & Tsoulfidis, 2016a, 2016b, 2018 και Piadi, et. al., 2014). Αν και οι μήτρες \mathbf{J} των πραγματικών οικονομιών είναι πλήρους τάξεως (*full rank*), η κατανομή των ιδιοτιμών τους φανερώνει ότι η ενεργή τάξη (*effective rank*) τους είναι πολύ χαμηλότερη από την πραγματική τάξη τους.

Προκειμένου να γίνει κατανοητή η εν λόγω θεμελιώδης σχέση, η οποία υποστηρίζεται από τα διαθέσιμα εμπειρικά στοιχεία, στρεφόμαστε στην «αποσύνθεση» της μήτρας \mathbf{J} βάσει της «φασματικής της αναπαράστασης (*spectral representation*)¹⁷»

$$\mathbf{J} = (\mathbf{y}_{J1}^T \mathbf{x}_{J1})^{-1} \mathbf{x}_{J1} \mathbf{y}_{J1}^T + \sum_{k=2}^n \lambda_{Jk} (\mathbf{y}_{Jk}^T \mathbf{x}_{Jk})^{-1} \mathbf{x}_{Jk} \mathbf{y}_{Jk}^T \quad (10)$$

ή, διαφορετικά

$$\mathbf{J} = \mathbf{X}_J \hat{\lambda}_J \mathbf{X}_J^{-1}$$

όπου \mathbf{X}_J είναι η μήτρα που περιλαμβάνει τα δεξιά ιδιοδιανύσματα της μήτρας \mathbf{J} , $\hat{\lambda}_J$ η διαγώνια μήτρα με τις ιδιοτιμές της \mathbf{J} , ενώ \mathbf{X}_J^{-1} είναι η μήτρα που σχηματίζεται από τα αριστερά ιδιοδιανύσματα της μήτρας \mathbf{J} .

Εν τέλει, ο «βαθμός κανονικότητας-ελεγχιμότητας (*degree of regularity-controllability*)» του οικονομικού συστήματος ορίζεται ως

$$DR \equiv \sigma_{K_n} \sigma_{K_1}^{-1} \quad (11)$$

όπου $0 \leq DR < 1$, και σ_{K_1} , σ_{K_n} δηλώνουν τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη ιδιάζουσα τιμή (*singular value*) της μήτρας Krylov, αντίστοιχα. Όταν $DR = 0$, η οικονομία είναι μη κανονική-μη ελέγξιμη, διαφορετικά, θεωρείται ότι είναι πλήρως κανονική-ελέγξιμη. Ωστόσο, όταν η τιμή DR είναι εξαιρετικά μικρή, η κανονικότητα-ελεγχιμότητα της οικονομίας είναι «μικρή» ή «αδύναμη». Διαφορετικά ειπωμένο, στην τελευταία περίπτωση, η οικονομία λέγεται ότι είναι «σχεδόν μη κανονική-μη ελέγξιμη» (Mariolis, 2019).¹⁸

¹⁷ Για μια αναλυτική παρουσίαση βλ. Meyer (2001, pp. 517-518).

¹⁸ Σύμφωνα με μία εναλλακτική προσέγγιση, η μεγαλύτερη διαφορά (ή «χάσμα (*gap*)») μεταξύ των διαδοχικών ιδιάζουσών τιμών της μήτρας Krylov παρέχει ένα μέτρο της απόστασης ενός κανονικού-ελέγξιμου ζεύγους $[\mathbf{J}, \mathbf{p}^T(0)]$ από το κοντινότερο μη κανονικό-μη ελέγξιμο ζεύγος ή, διαφορετικά ειπωμένο, του μεγέθους της «διατάραξης (*perturbation*)», η οποία απαιτείται προκειμένου να μετατραπεί ένα κανονικό-ελέγξιμο σύστημα σε ένα μη κανονικό-μη ελέγξιμο σύστημα (Boley & Lu, 1986).

1.6 Θεωρίες της Αξίας

Γενικά, διακρίνονται τρεις διαφορετικές θεωρίες της αξίας. Πρώτον, στην περίπτωση της «ίσης αξιακής σύνθεσης του κεφαλαίου (*equal value compositions of capital*)» των Ricardo-Marx-Dmitriev-Samuelson, το μέγεθος \mathbf{I}^T (\mathbf{v}^T) είναι αριστερό P-F ιδιοδιάνυσμα της μήτρας \mathbf{A} (\mathbf{J}). Ως εκ τούτου, οι τιμές των εμπορευμάτων είναι ανεξάρτητες από την κατανομή του εισοδήματος, και ίσες με τις εργασιακές τους αξίες, δηλαδή $\mathbf{p}^T = \mathbf{p}^T(0) = \mathbf{p}^T(1)$ ή, διαφορετικά ειπωμένο, φαίνεται να ισχύει η «καθαρά εργασιακή θεωρία της αξίας (*pure labour value theory*)» (PLVT) (Pasinetti, 1977, pp. 75-76). Σε αυτή την περίπτωση, η οικονομία είναι κανονική τάξης 1, ανεξαρτήτως της τάξης της μήτρας \mathbf{J} .

Δεύτερον, στην περίπτωση των δύο παραγωγικών κλάδων, οι συναρτήσεις $\mathbf{p}^T(\rho)$ είναι απαραίτητα μονότονες και, ως εκ τούτου, η κατεύθυνση της κίνησης της σχετικής αξίας των εμπορευμάτων προσδιορίζεται μόνον από τις διαφορές στις σχετικές εντάσεις κεφαλαίου, όπως εμφανίζεται και στις διάφορες εκδοχές της «παραδοσιακής θεωρίας της αξίας (*traditional value theory*)» (TVT).

Τέλος, όπως επισήμανε ο Sraffa (1960), αφήνοντας στην άκρη τις δύο παραπάνω περιοριστικές περιπτώσεις, οι αλλαγές στην κατανομή του εισοδήματος δύνανται να έχουν πολύπλοκες αναδραστικές επιπτώσεις στις τιμές των μέσων παραγωγής, πράγμα που συνεπάγεται ότι η κατεύθυνση της κίνησης των σχετικών τιμών των εμπορευμάτων, συναρτήσει του ποσοστού κέρδους, καθορίζεται όχι μόνον από τις διαφορές στις σχετικές εντάσεις κεφαλαίου, αλλά και από την κίνηση των σχετικών εντάσεων κεφαλαίου που προκύπτουν από τις αλλαγές στις σχετικές τιμές των εμπορευμάτων.

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (5) ως προς ρ καταλήγουμε¹⁹

$$\dot{p}_i \equiv dp_i / d\rho = v_i R(\text{CIE} + \rho \text{VE})$$

όπου το $\text{CIE} \equiv \kappa_i - R^{-1}$ δηλώνει το αποτέλεσμα της έντασης κεφαλαίου (*capital-intensity effect*), το $\kappa_i \equiv (\mathbf{p}^T \mathbf{H} \mathbf{e}_i) v_i^{-1}$ την ένταση κεφαλαίου στον καθέτως ολοκληρωμένο κλάδο ο οποίος παράγει το εμπόρευμα i , το R^{-1} την ένταση κεφαλαίου στο Πρότυπο Σύστημα, η οποία είναι ανεξάρτητη από τις τιμές των εμπορευμάτων και την κατανομή του εισοδήματος (επειδή, στην περίπτωσή μας, έχει επιλεγεί ως *numéraire* το Πρότυπο Εμπόρευμα) και, τέλος, το $\text{VE} \equiv \dot{\kappa}_i$ δηλώνει το Σραφφαϊανό αποτέλεσμα ή

¹⁹ Για μια αναλυτική παρουσίαση βλ. Mariolis & Tsoulfidis (2016a, pp. 40-45 και 2016b).

το αποτέλεσμα τιμής, το οποίο εξαρτάται από ολόκληρο το οικονομικό σύστημα και, επομένως, δεν είναι *a priori* γνωστό σε επίπεδο οποιουδήποτε μεμονωμένου κλάδου παραγωγής.

Ως εκ τούτου, όταν τα δύο παραπάνω αποτελέσματα έχουν αντίθετο πρόσημο, δηλαδή όταν $CIE > (<) 0$ και $VE < (>) 0$, η παραδοσιακή θεώρηση σχετικά με την κατεύθυνση της κίνησης των σχετικών τιμών των εμπορευμάτων δεν αληθεύει απαραίτητως, ενώ τα ζητήματα που παρατηρούνται απαιτούν μια νέα προσέγγιση στη θεωρία της αξίας και, ως εκ τούτου, αποτελούν τη βάση της «Στραφφαϊανής θεωρίας της αξίας (*Sraffian value theory*)» (SVT). Ως αποτέλεσμα, όλες οι θεωρήσεις και οι σχέσεις οι οποίες εξάγονται από το πλαίσιο της TVT δεν δύνανται, γενικά, να επεκταθούν πέρα από έναν κόσμο όπου, πρώτον, δεν υπάρχουν παραγόμενα μέσα παραγωγής ή, δεύτερον, υπάρχουν παραγόμενα μέσα παραγωγής, αλλά το ποσοστό κέρδους επί της χρηματικής αξίας των εν λόγω μέσων παραγωγής είναι μηδέν ή, τρίτον, το ποσοστό κέρδους είναι θετικό, αλλά η οικονομία παράγει ένα και μόνον ένα, απλό ή σύνθετο, εμπόρευμα, το οποίο χρησιμοποιείται τόσο ως μέσο παραγωγής όσο και ως μέσο κατανάλωσης. Συνεπώς, συμπεραίνεται ότι, οι δυσκολίες της TVT προκύπτουν από την αντικειμενική ύπαρξη πολύπλοκων διακλαδικών συνδέσεων στην πραγματοκρατική περίπτωση της παραγωγής εμπορευμάτων μέσω εμπορευμάτων και θετικών κερδών.

1.7 «Διαταράσσοντας» την Καθαρά Εργασιακή Θεωρία της Αξίας

Εκκινώντας από τις εξισώσεις (5) και (10) προκύπτει ότι υπάρχουν ορισμένες, ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες, πολικές περιπτώσεις, οι οποίες απορρέουν όταν οι μη-δεσπόμενες ιδιοτιμές της μήτρας \mathbf{J} είναι πολύ κοντά μεταξύ τους, δηλαδή $\lambda_{jk} \approx \lambda \equiv \alpha \pm i\beta$, όπου $i \equiv \sqrt{-1}$, $\forall k$, ή συγκεντρώνονται γύρω από συγκεκριμένες τιμές. Από την οπτική της θεωρίας της αξίας αρκεί να επικεντρωθεί κανείς στις ακόλουθες επτά²⁰ ιδεατές περιπτώσεις (Mariolis, 2019 και Mariolis & Tsoulfidis, 2016a, pp. 154-157).

Περίπτωση 1. Το οικονομικό σύστημα δύναται να αναλυθεί σε n οιονεί-όμοιους αυτοαναπαραγόμενους καθέτως ολοκληρωμένους κλάδους, δηλαδή $\mathbf{J} \approx \mathbf{I}$. Επομένως, $\lambda_{jk} \approx 1$ και $\mathbf{p}^T \approx \mathbf{p}^T(0)$. Ως εκ τούτου, η οικονομία τείνει να συμπεριφέρεται ως οικονομία ενός κλάδου, και η PLVT φαίνεται να ισχύει. Όταν $\mathbf{J} = \mathbf{I}$, η οικονομία είναι

²⁰ Αναλυτικά για τις πρώτες πέντε περιπτώσεις βλ. Mariolis & Tsoulfidis (2016a, pp. 152-157), ενώ για τις υπόλοιπες δύο βλ. Mariolis (2019, § 2.4 και παραδείγματα 1-5).

κανονική τάξης 1, ανεξάρτητα από την κατεύθυνση του διανύσματος των εργασιακών αξιών, $\mathbf{p}^T(0) = \mathbf{v}^T$.

Περίπτωση 2. Υπάρχουν ισχυρές οιονεί-γραμμικές σχέσεις μεταξύ των τεχνικών συνθηκών παραγωγής σε όλους τους καθέτως ολοκληρωμένους κλάδους, δηλαδή $rank[\mathbf{J}] \approx 1$, ή $\mathbf{J} \approx (\mathbf{y}_{J1}^T \mathbf{x}_{J1})^{-1} \mathbf{x}_{J1} \mathbf{y}_{J1}^T$. Συνεπάγεται ότι $\lambda_{jk} = |\lambda| \approx 0$ και

$$\mathbf{p}^T \approx (1 - \rho) \mathbf{p}^T(0) + \rho \mathbf{p}^T(1) \quad (12)$$

και πιο συγκεκριμένα η συνάρτηση $\mathbf{p}^T(\rho)$ τείνει να είναι ένας γραμμικός («κυρτός») συνδυασμός των ακραίων, οικονομικά σημαντικών, τιμών των διανυσμάτων $\mathbf{p}^T(0)$ και $\mathbf{p}^T(1)$.

Η παραπάνω προσέγγιση τάξης-ένα των ιδιοτιμών για το διάνυσμα των τιμών, έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i). Είναι γραμμική και ακριβής για τις ακραίες τιμές του ρ .
- (ii). Η ακρίβειά της αυξάνεται με τα μεγέθη $|\lambda_{jk}|^{-1}$.
- (iii). Όταν $rank[\mathbf{J}] = 1$, ισχύει πλήρως για όλα τα ρ .

Μια οικονομία τάξης-ένα, δηλαδή $rank[\mathbf{J}] = 1$, έχει τα ακόλουθα ουσιώδη γνωρίσματα:

- (i). Ανεξάρτητα από την κατεύθυνση του διανύσματος των εργασιακών αξιών, $\mathbf{p}^T(0)$, ισχύει

$$\mathbf{p}^T(0) \mathbf{J}^h = [(1 - \lambda_{A1}) \mathbf{y}_{J1}^T \mathbf{x}_{J1}]^{-1} \mathbf{y}_{J1}^T = \mathbf{p}^T(1), \quad h = 1, 2, \dots$$

διότι

$$\mathbf{J}^h = (\mathbf{y}_{J1}^T \mathbf{x}_{J1})^{-h} (\mathbf{y}_{J1}^T \mathbf{x}_{J1})^{h-1} \mathbf{x}_{J1} \mathbf{y}_{J1}^T = \mathbf{J}.$$

Ως εκ τούτου, $rank[\mathbf{K}] = 2$, γεγονός που σημαίνει ότι η οικονομία είναι μη κανονική, ή με άλλα λόγια, η οικονομία είναι κανονική τάξης 2.

- (ii). Σύμφωνα με το θεώρημα του Schur για τριγωνοποίηση μήτρας (Schur triangularization theorem, βλ. Meyer, 2001, pp. 508-509), η μήτρα \mathbf{J} μπορεί να μετασχηματιστεί, μέσω μιας ημι-θετικής μήτρας ομοιότητας \mathbf{T} , σε

$$\tilde{\mathbf{J}} \equiv \mathbf{T}^{-1} \mathbf{J} \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & [\tilde{\mathbf{J}}_{12}]_{1 \times (n-1)} \\ \mathbf{0}_{(n-1) \times 1} & \mathbf{0}_{(n-1) \times (n-1)} \end{pmatrix} \quad (13)$$

όπου η πρώτη στήλη της μήτρας \mathbf{T} είναι το ιδιοδιάνυσμα \mathbf{x}_{J_1} (οι υπόλοιπες στήλες είναι αυθαίρετα διανύσματα) και $\tilde{\mathbf{J}}_{12}$ είναι ένα $1 \times (n-1)$ θετικό διάνυσμα. Αν, για παράδειγμα, η μήτρα \mathbf{T} ήταν

$$\mathbf{T} = [\mathbf{x}_{J_1}, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n]$$

τότε, το διάνυσμα $\tilde{\mathbf{J}}_{12}$ θα ήταν

$$\tilde{\mathbf{J}}_{12} = (\mathbf{y}_{J_1}^T \mathbf{x}_{J_1})^{-1} [\mathbf{y}_{2J_1}^T, \mathbf{y}_{3J_1}^T, \dots, \mathbf{y}_{nJ_1}^T]$$

Η μήτρα ομοιότητας, \mathbf{T} , ορίζει ένα νέο σύστημα στο οποίο το αρχικό σύστημα πινάκων, αντικαθίσταται από έναν ημι-θετικό τριγωνικό πίνακα, $\tilde{\mathbf{J}}$, του οποίου η κύρια διαγώνιος αποτελείται από τις ιδιοτιμές της μήτρας \mathbf{J} . Επομένως, το αρχικό σύστημα τιμών (3) αναλύεται ως εξής

$$\mathbf{p}^T = w \mathbf{v}^T + \rho \mathbf{p}^T \mathbf{T} \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{T}^{-1} \quad (14\alpha)$$

ή, πολλαπλασιάζοντας με \mathbf{T} ,

$$\boldsymbol{\pi}^T = w \boldsymbol{\omega}^T + \rho \boldsymbol{\pi}^T \tilde{\mathbf{J}} \quad (14\beta)$$

όπου $\boldsymbol{\pi}^T = \mathbf{p}^T \mathbf{T}$ και $\boldsymbol{\omega}^T = \mathbf{v}^T \mathbf{T}$ δηλώνουν τα μετασχηματισμένα διανύσματα τιμών και εργασιακών αξιών, αντίστοιχα, ενώ $\pi_1 = \mathbf{p}^T \mathbf{x}_{J_1}$ και $\omega_1 = \mathbf{v}^T \mathbf{x}_{J_1}$. Η πρώτη εξίσωση του μετασχηματισμένου συστήματος τιμών (14β) αντιστοιχεί σε μία βιομηχανία η οποία παράγει ένα σύνθετο καθαρά κεφαλαιουχικό αγαθό (το οποίο δεν είναι παρά το Πρότυπο Εμπόρευμα του Staffa), ενώ οι υπόλοιπες εξισώσεις αντιστοιχούν σε βιομηχανίες που παράγουν καθαρά καταναλωτικά αγαθά. Άρα, το αρχικό σύστημα είναι οικονομικά ισοδύναμο με ένα γενικευμένο υπόδειγμα «*corn-tractor*», ακόμα και αν η μήτρα \mathbf{J} είναι μη διασπώμενη.

Περίπτωση 3. Έστω μία διατάραξη τάξης-ένα σε μια οικονομία στην οποία ισχύει η PLVT, δηλαδή $\mathbf{J} \approx (1 + \mathbf{y}^T \mathbf{x})^{-1} [\mathbf{I} + \mathbf{x} \mathbf{y}^T] (\geq \mathbf{0})$. Έπεται ότι οι ιδιοτιμές της μήτρας \mathbf{J} (εκτός της P-F) ισούνται με $\lambda_{jk} = \lambda = \alpha \approx (1 + \mathbf{y}^T \mathbf{x})^{-1}$ και το διάνυσμα τιμών είναι

$$\mathbf{p}^T \approx (1 - \rho \lambda_{jk})^{-1} [(1 - \rho) \mathbf{p}^T(0) + \rho (1 - \lambda_{jk}) \mathbf{p}^T(1)].$$

Συγκεκριμένα, το $p_i(\rho)$ τείνει να είναι ρητή συνάρτηση πρώτου βαθμού και, επομένως, μονότονη. Ως εκ τούτου, για $-\infty \ll \mathbf{y}^T \mathbf{x} \ll 0$ ή για $0 \ll \mathbf{y}^T \mathbf{x} \ll +\infty$, το σύστημα τείνει να συμπεριφέρεται σαν μια οικονομία με δύο κλάδους η οποία παράγει μόνο βασικά εμπορεύματα. Αυτό συνεπάγεται ότι η TVT φαίνεται να ισχύει. Καθώς

$\mathbf{y}^T \mathbf{x} \rightarrow 0$ λαμβάνουμε την ως άνω πρώτη περίπτωση, ενώ στην περίπτωση όπου $\mathbf{y}^T \mathbf{x} \rightarrow \pm\infty$ λαμβάνουμε την ως άνω δεύτερη περίπτωση.

Περίπτωση 4. Έστω μία διατάραξη τάξης-δύο σε μια οικονομία στην οποία ισχύει η PLVT, δηλαδή $\mathbf{J} \approx (1 + \lambda_{\Psi_1})^{-1} [\mathbf{I} + \sum_{k=1}^2 \mathbf{x}_k \mathbf{y}_k^T]$, όπου $\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k^T$, είναι ημι-θετικά διανύσματα (ή δύο μιγαδικά συζυγή ζεύγη διανυσμάτων, δηλαδή ιδιοδιανύσματα που συνδέονται με μιγαδικές ιδιοτιμές), και $\Psi \equiv [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]^T [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ (σε κάθε περίπτωση, η Ψ είναι μια 2×2 μήτρα με πραγματικές ιδιοτιμές). Έπεται ότι $n-2$ μη-δεσπόζουσες ιδιοτιμές της μήτρας \mathbf{J} τείνουν να ισούνται με $(1 + \lambda_{\Psi_1})^{-1}$, και οι υπόλοιπες τείνουν να ισούνται με $(1 + \lambda_{\Psi_2})(1 + \lambda_{\Psi_1})^{-1}$. Επομένως, το σύστημα τείνει να συμπεριφέρεται ως μία οικονομία με τρεις παραγωγικούς κλάδους. Ως εκ τούτου, η καμπύλη ωρομισθίου-ποσοστού κέρδους δύναται να παρουσιάσει σημεία καμπής και η σχέση τιμών εμπορευμάτων-ποσοστού κέρδους ενδέχεται να είναι μη-μονότονη. Το ίδιο ισχύει και στην περίπτωση όπου $\lambda_{jk} \approx \alpha \pm i\beta$ (όπου $0 \ll |\beta|$).

Περίπτωση 5. Οι υποδεσπόζουσες ιδιοτιμές της \mathbf{J} είναι μιγαδικές, $\lambda_{j2,3} \approx \alpha \pm i\beta$, όπου $0 \ll |\beta|$, και $\lambda_{j4} \approx \dots \approx \lambda_{jn} \approx 0$. Ως εκ τούτου, η καμπύλη ωρομισθίου-ποσοστού κέρδους τείνει να είναι ρητή συνάρτηση το πολύ τρίτου βαθμού και, επομένως, το σύστημα τείνει να συμπεριφέρεται ως μια διασπώμενη οικονομία με τέσσερεις παραγωγικούς κλάδους χωρίς αυτοαναπαράγόμενα μη-βασικά εμπορεύματα. Στις περιπτώσεις 4 και 5, οι συναρτήσεις τιμών ενδέχεται να είναι μη-μονότονες.

Περίπτωση 6. Έστω ότι η μήτρα \mathbf{J} είναι διπλά στοχαστική, ήτοι $\mathbf{e}^T \mathbf{J} = \mathbf{e}^T$ και $\mathbf{J} \mathbf{e} = \mathbf{e}$. Από την εξίσωση (7) συνεπάγεται ότι

$$\mathbf{p}^T(1) = [(1 - \lambda_{A1})n]^{-1} (\mathbf{I}^T \mathbf{e}) \mathbf{e}^T$$

ή, επειδή $\mathbf{v}^T \mathbf{e} = (1 - \lambda_{A1})^{-1} (\mathbf{I}^T \mathbf{e})$ και $\mathbf{p}^T(0) = \mathbf{v}^T$,

$$\mathbf{p}^T(1) = \bar{p}(0) \mathbf{e}^T \quad (15)$$

όπου $\bar{p}(0) \equiv n^{-1} (\mathbf{p}^T(0) \mathbf{e})$ ισούται με τον αριθμητικό μέσο των στοιχείων του διανύσματος των εργασιακών αξιών. Ως εκ τούτου, αν υπάρχει κάποιο εμπόρευμα του οποίου η εργασιακή αξία ισούται με τον αριθμητικό μέσο των εργασιακών αξιών, τότε, σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, η καμπύλη του εν λόγω εμπορεύματος απαραίτητως θα έχει

ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο οικονομικά σημαντικό διάστημα του ποσοστού κέρδους.

Περίπτωση 7. Επειδή $\mathbf{A} = [\mathbf{I} + \mathbf{H}]^{-1} \mathbf{H}$, δεν υπάρχει κανένας οικονομικά σημαντικός λόγος, ο οποίος να επιβάλει ότι η μήτρα \mathbf{J} είναι διπλά στοχαστική. Ωστόσο, πρέπει να σημειωθεί ότι:

(i). Κάθε διπλά στοχαστική μήτρα μπορεί να εκφρασθεί ως κυρτός συνδυασμός το πολύ $(n-1)^2 + 1$ μητρών μετάθεσης.

(ii). Η μήτρα \mathbf{J} είναι παρόμοια με την στοχαστική κατά στήλη μήτρα²¹ $\mathbf{M} \equiv \hat{\mathbf{y}}_{J1} \mathbf{J} \hat{\mathbf{y}}_{J1}^{-1}$, τα στοιχεία της οποίας είναι ανεξάρτητα τόσο από την επιλογή των φυσικών μονάδων μέτρησης όσο και από το διάνυσμα \mathbf{y}_{J1}^T . Η μήτρα \mathbf{M} μπορεί να θεωρηθεί ως μια μήτρα των σχετικών μεριδίων των κεφαλαιουχικών αγαθών στο κόστος των εκροών, εκτιμώμενων για $\rho = 1$, ή, εναλλακτικά ως μία μήτρα προκύπτουσα από τη μήτρα \mathbf{J} , αλλάζοντας τις φυσικές μονάδες μέτρησης των εμπορευμάτων²².

(iii). Τέλος, όταν υπάρχει μόνο ένα εμπόρευμα ως εισροή σε κάθε κλάδο (δηλαδή, ο κλάδος κ , $\kappa = 1, 2, \dots, n-1$, παράγει την εισροή για τον κλάδο $\kappa+1$, και ο κλάδος n παράγει την εισροή για τον κλάδο 1), η μήτρα \mathbf{A} είναι κυκλοτερής και μη πρωτόγονη. Επομένως, η μήτρα \mathbf{M} είναι διπλά στοχαστική.

Εν συνεχεία, θεωρούμε μια «βασική κυκλοτερή (*basic circulant*)» διατάραξη σε μία οικονομία στην οποία ισχύει η PLVT, δηλαδή

$$\mathbf{J} \approx \mathbf{C} \equiv c\mathbf{I} + (1-c)\mathbf{\Pi}$$

όπου $0 \leq c < 1$, $\mathbf{\Pi} \equiv \text{circ}[0, 1, 0, \dots, 0]$ είναι η βασική κυκλοτερής μήτρα μετάθεσης (μετά από κάθε πολλαπλασιασμό οποιασδήποτε μήτρας με την μήτρα $\mathbf{\Pi}$, μετατίθενται οι στήλες της μία θέση δεξιά), και $\mathbf{\Pi}^n = \mathbf{I}$.

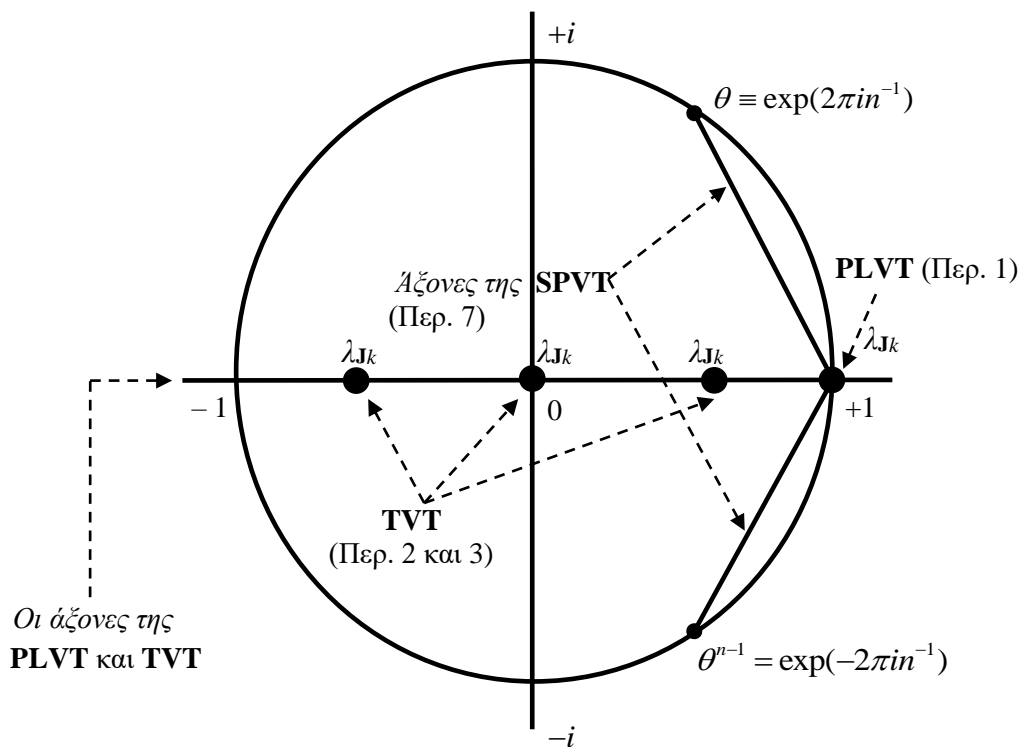
Οι ιδιοτιμές της κυκλοτερούς διπλά στοχαστικής μήτρας \mathbf{C} είναι $c + (1-c)\theta^\kappa$, όπου $\kappa = 0, 1, \dots, n-1$, $\theta \equiv \exp(2\pi i n^{-1})$, και $\theta^\kappa = \cos(2\pi \kappa n^{-1}) + i \sin(2\pi \kappa n^{-1})$ είναι οι n διακριτές ρίζες της μονάδας. Σε αυτή την περίπτωση η σχέση τιμών εμπορευμάτων-ποσοστού κέρδους είναι μη-μονότονη ανεξαρτήτως του διανύσματος των εργασιακών αξιών.

²¹ $\mathbf{e}^T \mathbf{M} = \mathbf{y}_{J1}^T \hat{\mathbf{y}}_{J1}^{-1} \mathbf{J} \hat{\mathbf{y}}_{J1} = \mathbf{y}_{J1}^T \hat{\mathbf{y}}_{J1}^{-1} = \mathbf{e}^T$.

²² Όταν η τάξη της μήτρας \mathbf{J} ισούται με 1, όλες οι στήλες της μήτρας \mathbf{M} είναι ίσες μεταξύ τους.

1.8 Η θέση των πολικών θεωριών της αξίας στο μιγαδικό επίπεδο

Οι παραπάνω επτά ιδεατές περιπτώσεις, καθώς και οι πιθανοί συνδυασμοί τους, δείχνουν ότι η θέση των μη δεσποζουσών ιδιοτιμών στο μιγαδικό επίπεδο θα μπορούσε να θεωρηθεί ως δείκτης των διακλαδικών συνδέσεων. Η αναπαράσταση των παραπάνω επτά περιπτώσεων είναι εφικτή μέσω της βοήθειας του μοναδιαίου κύκλου. Στο Σχήμα 1 απεικονίζεται²³ η θέση των πολικών θεωριών της αξίας, δηλαδή της PLVT, TVT και SPVT, στο μιγαδικό επίπεδο.



Σχήμα 1. Η θέση των πολικών θεωριών της αξίας στο μιγαδικό επίπεδο

Η περίπτωση 1 αντιστοιχεί στην καθαρά εργασιακή θεωρία της αξίας (PLVT), ενώ οι περιπτώσεις 2 και 3 αντιστοιχούν στην παραδοσιακή θεωρία της αξίας (TVT). Οι περιπτώσεις 4, 5 και 6 αντιστοιχούν στη Σραφφαϊανή θεωρία της αξίας (SVT). Τέλος, η περίπτωση 7, δηλαδή η περίπτωση της βασικής κυκλοτερούς διατάραξης σε μια οικονομία στην οποία ισχύει η PLVT, αντιστοιχεί στην «Σραφφαϊανή πολική θεωρία της αξίας (*Sraffian polar value theory*)» (SPVT), επειδή σε αυτή την περίπτωση η

²³ Αναδημοσίευση από το άρθρο: Mariolis, T. (2019) *The Location of the Value Theories in the Complex Plane and the Degree of Regularity-Controllability of Actual Economies*, Figure 3, § 2.5, ©Mimeo.

σχέση τιμών εμπορευμάτων-ποσοστού κέρδους είναι μη-μονότονη όποιο και αν είναι το διάλυμα των εργασιακών αξιών.

Κεφάλαιο 2^ο Εμπειρική Διερεύνηση

2.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται και αναλύονται τα αποτελέσματα της διεξαχθείσας μελέτης. Δεδομένου ότι το σύστημα τιμών εμπορευμάτων-χρηματικού ωρομισθίου-ποσοστού κέρδους το οποίο αφορά έναν μεγάλο όγκο πραγματικών και ποικίλων οικονομιών (αλλά, *ex hypothesis*, γραμμικών και απλής παραγωγής) έχει εξετασθεί εκτενώς στη βιβλιογραφία, επί του παρόντος πραγματοποιείται μια προσπάθεια επιβεβαίωσης σε ευρεία κλίμακα των έως τώρα εμπειρικών αποτελεσμάτων. Κυρίως, όμως, πραγματοποιείται μία επέκταση των αποτελεσμάτων αυτών προκειμένου να εξαχθούν νέα συμπεράσματα τα οποία αφορούν στην κανονικότητα-ελεγκσιμότητα των πραγματικών οικονομικών συστημάτων. Ως εκ τούτου, επειδή ο όγκος των έως σήμερα διαθέσιμων ευρημάτων σχετικά με την κανονικότητα-ελεγκσιμότητα των οικονομικών συστημάτων, τις ιδιάζουσες τιμές και την αριθμητική τάξη της μήτρας Krylon των πραγματικών οικονομιών είναι περιορισμένος (Mariolis, 2019), η συμβολή της παρούσας διπλωματικής εργασίας έγκειται ακριβώς στη διερεύνηση των ανωτέρω ζητημάτων.

Στη συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου, αναλύονται τα εμπειρικά δεδομένα, παρατίθενται τα ευρήματα της μελέτης, εξάγονται τα συμπεράσματα και πραγματοποιείται η σύνδεση με το θεωρητικό πλαίσιο.

2.2 Επεξεργασία εμπειρικών δεδομένων

Για τη διεξαγωγή της παρούσας μελέτης, τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν προέρχονται από εθνικούς πίνακες εισροών-εκροών οι οποίοι αφορούν σαράντα τρεις (43) οικονομίες και καλύπτουν την περίοδο 2000-2014. Για κάθε μία από αυτές τις οικονομίες εξετάστηκαν τα έτη 2000, 2005, 2010 και 2014. Πρόκειται για συμμετρικούς πίνακες εισροών-εκροών (Symmetric Input-Output Tables-SIOTs), οι οποίοι προέρχονται από τη World Input-Output Database (2019) (Timmer, Dietzenbacher, Los, Stehrer, & de Vries, 2015). Η βάση δεδομένων καλύπτει τα 28 κράτη-μέλη της Ευρωπαϊκής Ένωσης, καθώς και 15 ακόμη χώρες. Συγκεκριμένα, οι χώρες οι οποίες εξετάστηκαν είναι οι εξής: Αυστραλία, Αυστρία, Βέλγιο, Βουλγαρία, Βραζιλία, Γαλλία, Γερμανία, Δανία, Δημοκρατία της Κορέας, Δημοκρατία της Σλοβακίας, Ελβετία, Ελλάδα, Εσθονία, Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής, Ηνωμένο Βασίλειο της Μεγάλης Βρετανίας και Βορείου Ιρλανδίας, Ιαπωνία, Ινδία, Ινδονησία, Ιρλανδία, Ισπανία, Ιταλία, Καναδάς, Κάτω Χώρες, Κροατία, Κύπρος, Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας, Λετονία,

Λιθουανία, Λουξεμβούργο, Μάλτα, Μεξικό, Νορβηγία, Ουγγαρία, Πολωνία, Πορτογαλία, Ρουμανία, Ρωσική Ομοσπονδία, Σλοβενία, Σουηδία, Ταϊβάν, Τουρκία, Τσεχική Δημοκρατία και Φινλανδία. Τα δεδομένα παρουσιάζουν 56 συνολικά κλάδους, ταξινομούνται σύμφωνα με το International Standard Industrial Classification 4 (ISIC Rev. 4) και οι πίνακες είναι σε συμφωνία με το Σύστημα Εθνικών Λογαριασμών του 2008 (SNA 2008). Συνεπώς, τα στοιχεία που παρέχονται δίνουν πίνακες και διανύσματα διαστάσεων 56×56 και 1×56 , αντίστοιχα. Ωστόσο, ο τελευταίος κλάδος, δηλαδή ο κλάδος U (Activities of extraterritorial organizations and bodies), παρουσιάζει μηδενική εκροή εμπορεύματος και μηδενική εισροή εργασίας σε όλες τις χώρες και για όλα τα έτη και, επομένως, έχει αφαιρεθεί από όλους τους υπολογισμούς (για το Μεξικό ο κλάδος U παρουσιάζει θετική εκροή, ωστόσο δεν παρατηρούνται διακλαδικές συνδέσεις και, κατά συνέπεια, δεν έχει συμπεριληφθεί στους υπολογισμούς). Επιπλέον, ο κλάδος T (Activities of households as employers; undifferentiated goods-and services-producing activities of households for own use) δεν παρουσιάζει, στη γενική περίπτωση, διακλαδικές συνδέσεις, με αποτέλεσμα η εκροή του κλάδου να ισούται με την προστιθέμενη αξία του και, ως εκ τούτου, έχει αφαιρεθεί από τους περισσότερους υπολογισμούς. Κατά συνέπεια, στη γενική περίπτωση, οι πίνακες και τα διανύσματα είναι διαστάσεων 54×54 και 1×54 , αντίστοιχα. Εντούτοις, για τις χώρες Αυστραλία, Η.Π.Α., Ιαπωνία, Κροατία και Μάλτα (για τα έτη 2010 και 2014) ο κλάδος T εμφανίζει διακλαδικές συνδέσεις και, επομένως, έχει συμπεριληφθεί στους υπολογισμούς που αφορούν αυτές τις χώρες. Τέλος, σημειώνεται ότι, υπάρχουν επιπλέον κλάδοι, πέραν των προαναφερθέντων, οι οποίοι έχουν αφαιρεθεί από τους υπολογισμούς για ορισμένες χώρες. Πρώτον, για ορισμένες οικονομίες υπάρχουν κλάδοι οι οποίοι παρουσιάζουν μηδενική εκροή εμπορεύματος και μηδενική εισροή εργασίας. Δεύτερον, για ορισμένες οικονομίες υπάρχουν κλάδοι για τους οποίους η αξία της εκροής τους ισούται με την προστιθέμενη αξία τους, χωρίς να παρουσιάζουν διακλαδικές συνδέσεις. Επομένως, οι κλάδοι οι οποίοι εμπίπτουν σε αυτές τις δύο περιπτώσεις έχουν αφαιρεθεί από τους υπολογισμούς. Στο Παράρτημα Α αναφέρονται αναλυτικά, ανά χώρα και έτος, οι κλάδοι που έχουν αφαιρεθεί.

Περαιτέρω, επισημαίνεται ότι, για την κατασκευή του διανύσματος της άμεσης εργασίας χρησιμοποιήθηκε από τον πίνακα Socio-Economic Accounts (WIOD, 2019) η μεταβλητή EMPE («Number of employees (thousands)»). Ωστόσο, η Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας αποτελεί εξαίρεση, διότι η μεταβλητή EMPE δεν παρουσιάζει στοιχεία. Επομένως, για τους υπολογισμούς που αφορούν την Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας

χρησιμοποιήθηκε η μεταβλητή EMP («Number of persons engaged (thousands)»). Τέλος, σημειώνεται ότι, τα στοιχεία διατίθενται σε μορφή *excel*, ενώ η επεξεργασία τους και οι υπολογισμοί έγιναν μέσω του προγράμματος *Mathematica*.

2.3 Παρουσίαση αποτελεσμάτων

Σύμφωνα με τους εμπειρικούς πίνακες εισροών-εκροών απλής παραγωγής προκύπτει ότι, τα μέτρα των μη-δεσποζουσών ιδιοτιμών των κανονικοποιημένων μητρών των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών (δηλαδή, των μητρών **J**) ακολουθούν μία σαφή τάση. Ειδικότερα, παρατηρείται ότι συνωστίζονται σε πολύ χαμηλές τιμές, πολύ κοντά στο μηδέν και οριοθετούνται σε μια σχετικά μικρή περιοχή του μοναδιαίου κύκλου. Ως γνωστόν, μελετώντας την κατανομή των ιδιοτιμών των μητρών **J** δύνανται να εξαχθούν σημαντικά συμπεράσματα σχετικά με τις καμπύλες τιμών εμπορευμάτων-ποσοστού κέρδους (Mariolis & Tsoulfidis, 2016a και 2016b). Ως εκ τούτου, διαφαίνεται ότι, αν και δεν μπορεί να είναι γνωστή *a priori*, η κατεύθυνση της κίνησης των σχετικών τιμών των εμπορευμάτων, συναρτήσει του ποσοστού κέρδους, δεν θα πρέπει να εμφανίζει πολλές αλλαγές μονοτονίας.

Στην πραγματικότητα, τόσο τα μέτρα των ιδιοτιμών των μητρών **J** όσο και οι ιδιάζουσες τιμές των μητρών Krylon (μητρών **K**) ακολουθούν φθίνουσα εκθετική τάση. Επιπλέον, οι μιγαδικές (όπως και οι αρνητικές) ιδιοτιμές των μητρών **J** τείνουν να εμφανίζονται σε χαμηλότερες τάξεις, δηλαδή το μέτρο τους είναι σχετικά μικρό. Κατά γενικό κανόνα, ακόμη και στην περίπτωση κατά την οποία οι μιγαδικές ιδιοτιμές εμφανίζονται σε υψηλότερες βαθμίδες, όπως στη δεύτερη ή στην τρίτη, το πραγματικό μέρος είναι κατά πολύ μεγαλύτερο από το φανταστικό. Γενικά, το φανταστικό μέρος των μιγαδικών ιδιοτιμών γίνεται προοδευτικά μικρότερο. Συνεπώς, η κατανομή των μέτρων των ιδιοτιμών²⁴ είναι μια αρκετά ακριβής αναπαράσταση της κατανομής των ιδιοτιμών, ενώ οι μιγαδικές ιδιοτιμές δεν αποτελούν καθοριστικό λόγο στον προσδιορισμό των μορφών των εμπειρικών σχέσεων τιμών εμπορευμάτων-χρηματικού ωρομισθίου-ποσοστού κέρδους (Mariolis & Tsoulfidis, 2011, 2014, 2016a και 2016b).

Στο Παράρτημα Γ (Πίνακας 1) δίνονται, για τις οικονομίες που εξετάζονται στην παρούσα μελέτη, το μέτρο της πρώτης, δεύτερης και τελευταίας ιδιοτιμής των

²⁴ Στο Παράρτημα Β παρουσιάζονται τα σχήματα με την κατανομή των ιδιοτιμών για όλες τις οικονομίες που εξετάζονται.

μητρών \mathbf{J} , καθώς και ο γεωμετρικός μέσος (GM) των μη-δεσποζουσών ιδιοτιμών των μητρών \mathbf{J} , τον οποίο δυνάμεθα να εκφράσουμε ως

$$GM = |\det[\mathbf{J}]|^{(n-1)^{-1}} = \left(\prod_{i=1}^n \sigma_{J_i}\right)^{(n-1)^{-1}}$$

όπου σ_{J_i} είναι οι ιδιάζουσες τιμές της μήτρας \mathbf{J} .²⁵ Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται ο γεωμετρικός μέσος, διότι θεωρείται, ως γνωστόν, καταλληλότερος για την ανίχνευση της κεντρικής τάσης ενός εκθετικού συνόλου αριθμών. Επιπλέον, υπολογίζεται ο λόγος μεταξύ της μικρότερης προς τη μεγαλύτερη ιδιάζουσα τιμή των μητρών \mathbf{J} , $\sigma_{J_n} \sigma_{J_1}^{-1}$, η απόλυτη τιμή της ορίζουσας των μητρών \mathbf{K} , ο βαθμός κανονικότητας-ελεγκσιμότητας, DR , των οικονομικών συστημάτων και, τέλος, η αριθμητική τάξη (*numerical rank*) των μητρών \mathbf{K} , η οποία ορίζεται ως ο αριθμός των ιδιάζουσών τιμών των μητρών \mathbf{K} που είναι μεγαλύτερες από $\tau \sigma_{K_1}$, όπου τ είναι μία μικρή θετική ανοχή.

Οι εξεταζόμενες οικονομίες ομαδοποιούνται, στην παρούσα εργασία, σε τρεις διαφορετικές κατηγορίες. Ειδικότερα, ταξινομούνται στις κατηγορίες «Ευρωζώνη», «Group of 10 (G10)» και «Υπόλοιπος Κόσμος». Η Ευρωζώνη περιλαμβάνει τα δεκαεννέα κράτη-μέλη της Οικονομικής και Νομισματικής Ένωσης του ευρώ²⁶, η G10 περιλαμβάνει έντεκα βιομηχανικές χώρες²⁷ και, τέλος, ο Υπόλοιπος Κόσμος περιλαμβάνει τις εναπομείνουσες δεκαοκτώ οικονομίες του δείγματός μας²⁸. Οι δύο πρώτες κατηγορίες απαρτίζονται από χώρες με παρόμοια οικονομικά συμφέροντα. Οι χώρες που αποτελούν την Ευρωζώνη, πέρα από μια ενιαία γεωγραφική οντότητα, συντονίζουν στενά τις δημοσιονομικές και οικονομικές πολιτικές τους εξαιτίας του κοινού νομίσματος και της κοινής νομισματικής πολιτικής. Η G10 αποτελείται από μια ομάδα χωρών με ιδιαίτερα ανεπτυγμένες οικονομίες, οι οποίες συμμετέχουν στη διάθεση χρημάτων στο Διεθνές Νομισματικό Ταμείο για δάνεια προς τα μέλη του. Τέλος, οι εναπομείνουσες χώρες αποτέλεσαν μία ομάδα δίχως να παρουσιάζουν ιδιαίτερα κοινά χαρακτηριστικά και, έτσι, χαρακτηρίζονται, επί του παρόντος, ως Υπόλοιπος Κόσμος.

²⁵ Το πλήθος των ιδιοτιμών και των ιδιάζουσών τιμών για όλες τις οικονομίες που εξετάζονται ανέρχεται σε 8966.

²⁶ Αυστρία, Βέλγιο, Γαλλία, Γερμανία, Σλοβακία, Ελλάδα, Εσθονία, Ιρλανδία, Ισπανία, Ιταλία, Κάτω Χώρες, Κύπρος, Λετονία, Λιθουανία, Λουξεμβούργο, Μάλτα, Πορτογαλία, Σλοβενία και Φινλανδία.

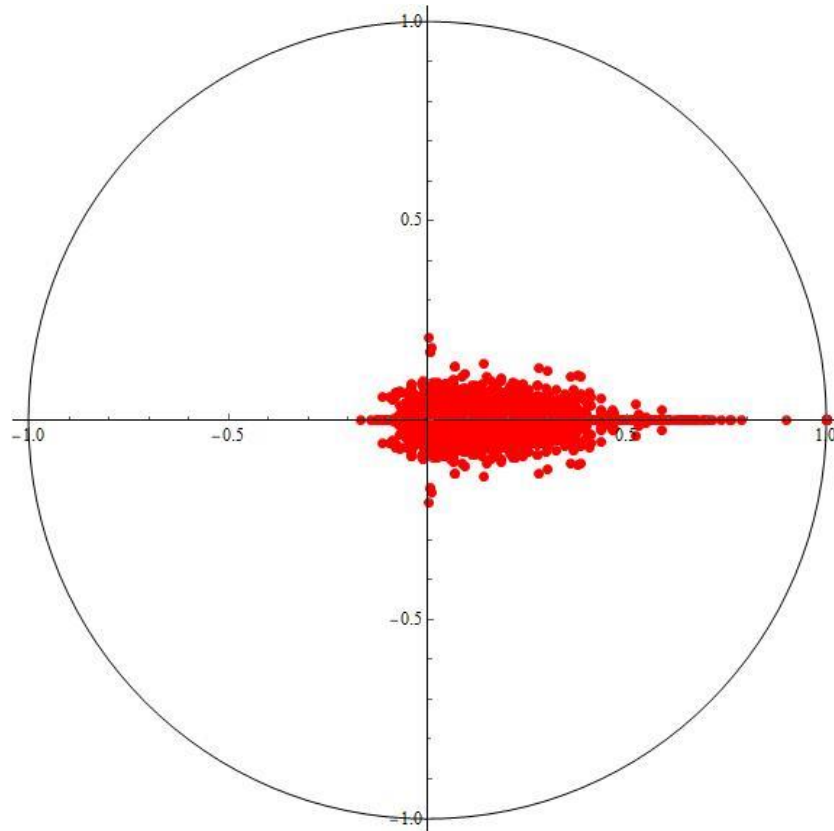
²⁷ Βέλγιο, Γαλλία, Γερμανία, Ελβετία, Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής, Ηνωμένο Βασίλειο, Ιαπωνία, Ιταλία, Καναδάς, Κάτω Χώρες και Σουηδία.

²⁸ Αυστραλία, Βουλγαρία, Βραζιλία, Δανία, Δημοκρατία της Κορέας, Ινδία, Ινδονησία, Κροατία, Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας, Μεξικό, Νορβηγία, Ουγγαρία, Πολωνία, Ρουμανία, Ρωσική Ομοσπονδία, Ταϊβάν, Τουρκία και Τσεχική Δημοκρατία.

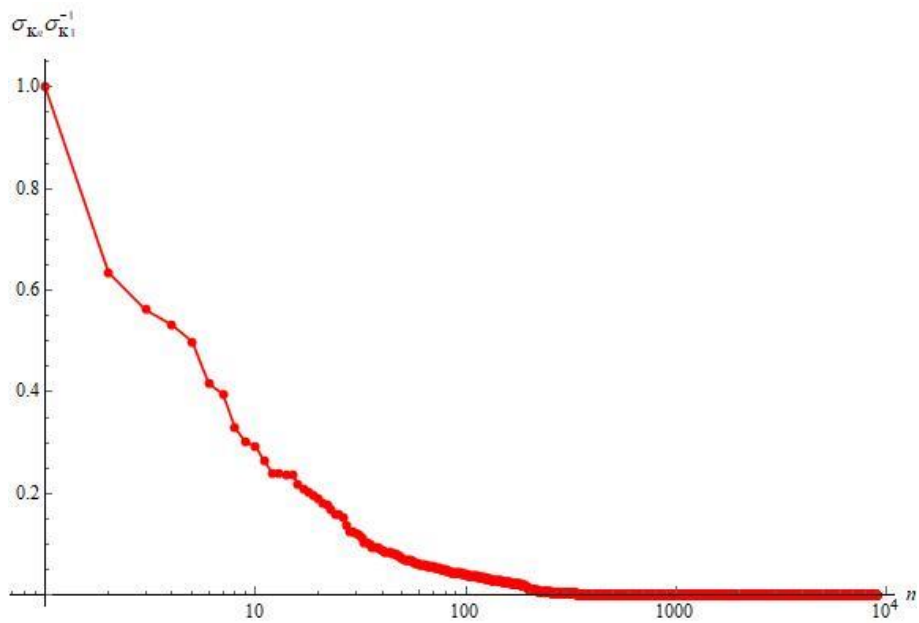
Ως αποτέλεσμα αυτών των ταξινομήσεων, παρακάτω παρουσιάζονται οκτώ σχήματα τα οποία αφορούν τη θέση των ιδιοτιμών των μητρών **J** στο μιγαδικό επίπεδο (στον κάθετο άξονα απεικονίζεται το φανταστικό μέρος των ιδιοτιμών) και την κατανομή των κανονικοποιημένων ιδιζουσών τιμών των μητρών **K** (ο οριζόντιος άξονας έχει σχεδιαστεί σε λογαριθμική κλίμακα). Τα Σχήματα 2 και 3 αναφέρονται στο σύνολο των υπό εξέταση οικονομιών, τα Σχήματα 4 και 5 στην Ευρωζώνη, τα Σχήματα 6 και 7 στη G10 και, τέλος, τα Σχήματα 8 και 9 στον Υπόλοιπο Κόσμο. Επιπλέον, ο γεωμετρικός μέσος των μη-δεσποζουσών ιδιοτιμών των μητρών **J** είναι 0.033 για όλες τις οικονομίες, 0.043 για την Ευρωζώνη, 0.03 για την G10 και 0.031 για τον Υπόλοιπο Κόσμο. Συνεπώς, δεν φαίνεται να παρουσιάζονται μεγάλες διαφορές μεταξύ των τριών ομάδων-χωρών της ανάλυσής μας.

Τα ευρήματα της παρούσας έρευνας έρχονται, από τη μία πλευρά, να ενισχύσουν και, από την άλλη πλευρά, να επεκτείνουν (στο ζήτημα της κανονικότητας-ελεγχιμότητας των πραγματικών οικονομικών συστημάτων) τα συμπεράσματα όλων των προηγούμενων σχετικών ερευνών, στις οποίες έχει γίνει αναφορά. Σε ό,τι αφορά τα σχήματα, η θέση των ιδιοτιμών στο μοναδιαίο κύκλο καλύπτει μια πολύ συγκεκριμένη περιοχή (μια στενή λωρίδα) του μοναδιαίου κύκλου, με αισθητά μεγάλη συσσώρευση ιδιοτιμών στην περιοχή γύρω από το μηδέν. Στην περίπτωση της Ευρωζώνης η στενή λωρίδα των ιδιοτιμών φαίνεται να επεκτείνεται, κάπως, καθώς υπάρχει ένας μικρός αριθμός μιγαδικών ιδιοτιμών οι οποίες παρουσιάζουν μικρές τιμές στο πραγματικό μέρος και μεγάλες τιμές στο φανταστικό. Επιπλέον, η κατανομή των κανονικοποιημένων ιδιζουσών τιμών ακολουθεί την μορφή υπερβολής, ενώ αξιοσημείωτη είναι η εν λόγω κατανομή στην περίπτωση της G10 όπου εμφανίζεται κοίλη καμπύλη.

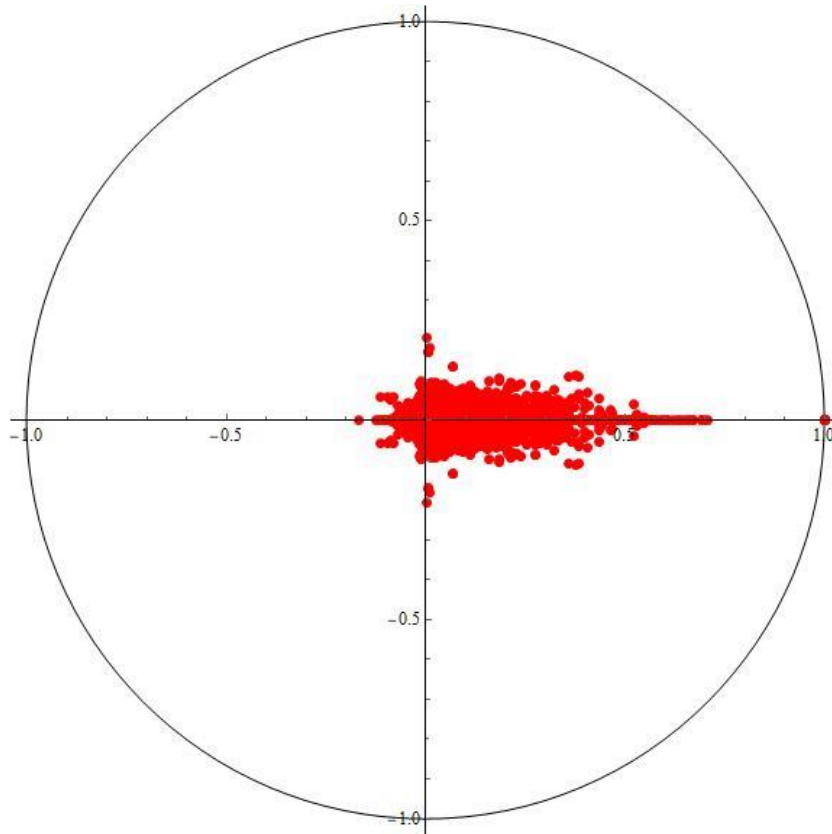
Τέλος, τόσο τα φασματικά χαρακτηριστικά όσο και τα χαρακτηριστικά κανονικότητας-ελεγχιμότητας των οικονομιών που εξετάζονται, και σε συνδυασμό με τη θεωρητική ανάλυση που αναπτύχθηκε στην παρούσα εργασία συνηγορούν ότι, οι πραγματικές οικονομίες που μελετώνται σε όρους απλής παραγωγής *τείνουν* να συμπεριφέρονται ως μη κανονικά-μη ελέγξιμα συστήματα, συμπέρασμα το οποίο εξάγεται λόγω των χαμηλών βαθμών κανονικότητας-ελεγχιμότητας (κατά μέσο όρο 10^{-19}). Επιπλέον, οι οικονομίες του πραγματικού κόσμου φαίνεται να συμπεριφέρονται ως οικονομίες με λίγους παραγωγικούς κλάδους, όπως συμπεραίνεται από τις πολύ χαμηλές τάξεις των μητρών K_{jly} , οι οποίες κυμαίνονται από 7 έως 2, αναλόγως της εκάστοτε θετικής ανοχής που έχει δοθεί.



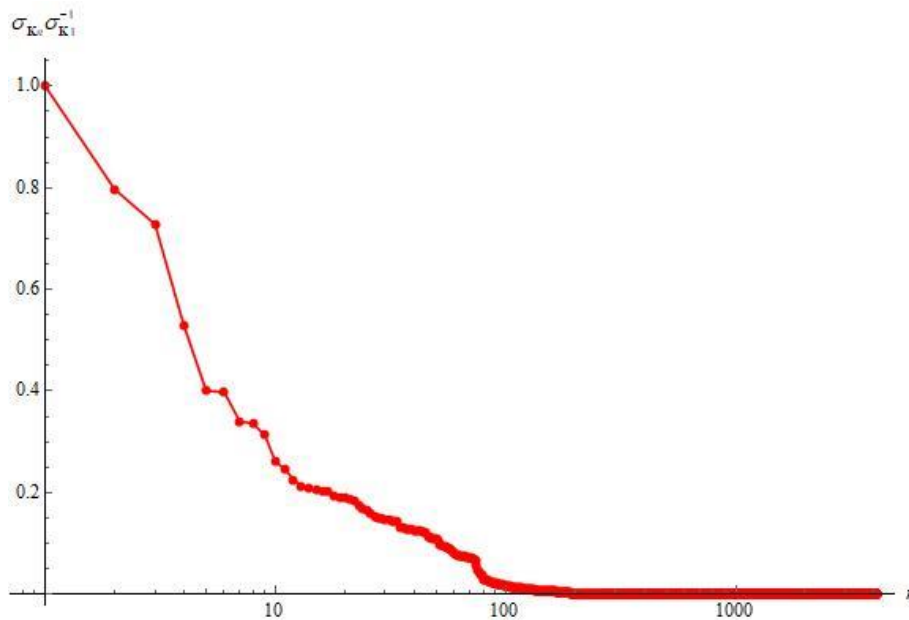
Σχήμα 2. Η θέση των ιδιοτιμών των μητρών **J** στο μιγαδικό επίπεδο: Όλες οι χώρες (43 χώρες) - 172 SIOTs



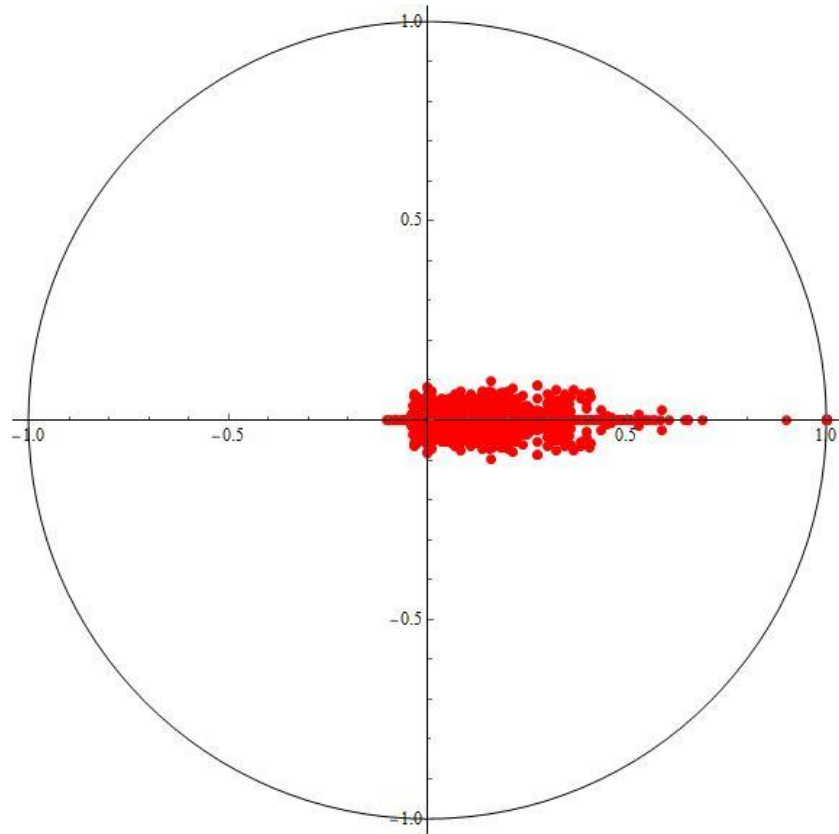
Σχήμα 3. Οι κανονικοποιημένες ιδιάζουσες τιμές όλων των μητρών Krylov (43 χώρες) - 172 SIOTs



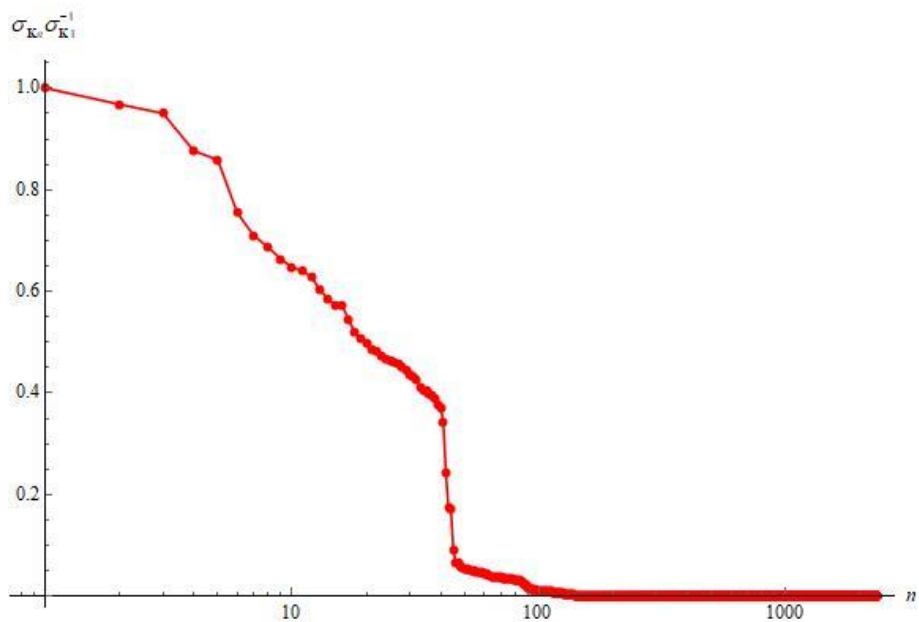
Σχήμα 4. Η θέση των ιδιοτιμών των μητρών \mathbf{J} στο μιγαδικό επίπεδο: Ευρωζώνη (19 χώρες) - 76 SIOTs



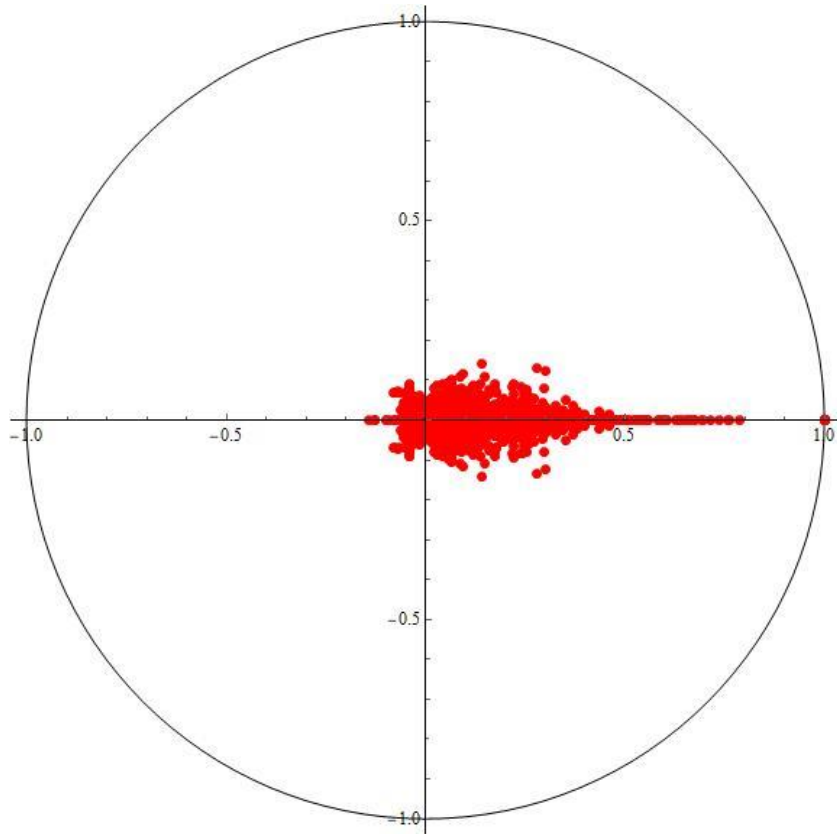
Σχήμα 5. Οι κανονικοποιημένες ιδιάζουσες τιμές των μητρών Krylon για την Ευρωζώνη (19 χώρες) - 76 SIOTs



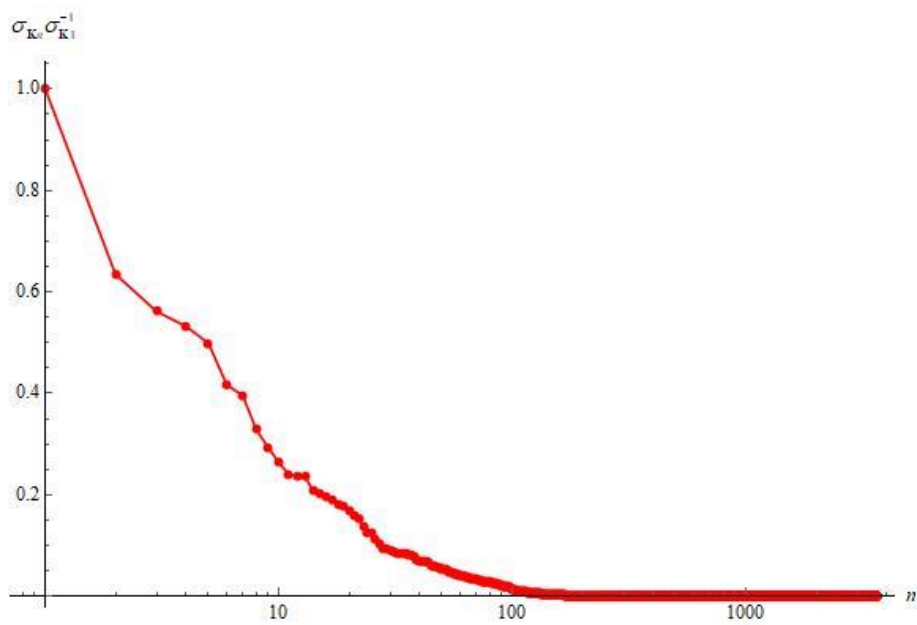
Σχήμα 6. Η θέση των ιδιοτιμών των μητρών \mathbf{J} στο μιγαδικό επίπεδο: G10 (11 χώρες) - 44 SIOTs



Σχήμα 7. Οι κανονικοποιημένες ιδιάζουσες τιμές των μητρών Krylov για την G10 (11 χώρες) - 44 SIOTs



Σχήμα 8. Η θέση των ιδιοτιμών των μητρών J στο μιγαδικό επίπεδο: Υπόλοιπος Κόσμος (18 χώρες) - 72 SIOTs



Σχήμα 9. Οι κανονικοποιημένες ιδιάζουσες τιμές των μητρών Krylov για τον Υπόλοιπο Κόσμο (18 χώρες) - 72 SIOTs

2.4 Συμπεράσματα Εμπειρικής Διερεύνησης

Σε συμφωνία με τα αποτελέσματα που εξήχθησαν στην παρούσα εργασία, δυνάμεθα να προχωρήσουμε στη διατύπωση ορισμένων βασικών συμπερασμάτων που αφορούν τις οικονομίες απλής παραγωγής. Αρχικά, όπως φανερώνεται από τα σχήματα που αφορούν στη θέση των ιδιοτιμών στο μοναδιαίο κύκλο, η κατανομή των ιδιοτιμών μπορεί να θεωρηθεί ως μεικτός συνδυασμός των περιπτώσεων 4 και 5 (παράγραφος 1.7), δηλαδή των περιπτώσεων που αντιστοιχούν στη Σραφφαϊανή θεωρία της αξίας, λόγω των πολύ χαμηλών αριθμητικών τάξεων των μητρών $Krylon$ (κατά μέσο όρο 5-6 ή 3, αναλόγως της ανοχής). Αυτό σημαίνει ότι, οι πραγματικές οικονομίες μπορούν να θεωρηθούν ως οικονομίες με –κατά εμπειρικό κανόνα– 3 έως 6 παραγωγικούς κλάδους και, επομένως, οι καμπύλες ωρομισθίου-ποσοστού κέρδους δύνανται να παρουσιάζουν σημεία καμπής και οι σχέσεις τιμών εμπορευμάτων-ποσοστού κέρδους δύνανται να είναι μη-μονότονες. Ωστόσο, αυτά τα φαινόμενα δεν αναμένεται να έχουν μεγάλη έκταση. Προφανώς, μόνο οι εμπειρικοί υπολογισμοί μπορούν να προσδιορίσουν με ακρίβεια αυτή την έκταση. Δεδομένου, όμως, ότι τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας βρίσκονται σε συμφωνία με εκείνα της σχετικής βιβλιογραφίας, *εικάζεται* ότι, για παράδειγμα, και στο δείγμα που εξετάζεται στην παρούσα μελέτη, οι μη-μονότονες καμπύλες τιμών-ποσοστού κέρδους θα είναι της τάξης του 20%.

Τέλος, οι πραγματικές οικονομίες χαρακτηρίζονται από πολύ «μικρούς» ή «αδύναμους» βαθμούς κανονικότητας-ελεγκσιμότητας, καθώς οι βαθμοί αυτοί κυμαίνονται από 10^{-21} έως 10^{-18} . Το εν λόγω εύρημα προκύπτει, κατά κύριο λόγο, από τις κατανομές των χαρακτηριστικών τιμών των μητρών \mathbf{J} . Ως αποτέλεσμα, οι οικονομίες του πραγματικού κόσμου χαρακτηρίζονται *a posteriori* ως «σχεδόν μη κανονικά-μη ελέγξιμα συστήματα». Αφενός η μη κανονικότητα του οικονομικού συστήματος σημαίνει ότι (i) υπάρχουν εμπορεύματα των οποίων οι σχετικές τιμές δεν επηρεάζονται από μεταβολές της κατανομής του εισοδήματος και (ii) η καμπύλη ωρομισθίου-ποσοστού κέρδους τείνει να είναι γραμμική, ανεξάρτητα από το επιλεγμένο *numéraire*, και αφετέρου η μη ελεγκσιμότητα σημαίνει ότι υπάρχουν μεταβλητές κατάστασης οι οποίες δεν επηρεάζονται από την εισροή του συστήματος, δηλαδή, εν προκειμένω, οι τιμές των εμπορευμάτων δεν επηρεάζονται από το χρηματικό ωρομίσθιο.

Συμπερασματικές Παρατηρήσεις

Συνοψίζοντας, η ανάλυση του συστήματος των τιμών εμπορευμάτων με δεδομένα τα οποία προέρχονται από πίνακες εισροών-εκροών απλής παραγωγής πραγματικών οικονομιών κατέδειξε ότι, οι μήτρες κανονικότητας-ελεγκσιμότητας των οικονομιών του πραγματικού κόσμου χαρακτηρίζονται από πολύ χαμηλές αριθμητικές τάξεις και, κατ' επέκταση, οι οικονομίες από πολύ χαμηλούς βαθμούς κανονικότητας-ελεγκσιμότητας. Το συγκεκριμένο εύρημα προκύπτει από τις κατανομές των χαρακτηριστικών τιμών των κανονικοποιημένων μητρών των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών και υποδεικνύει ότι οι πραγματικές οικονομίες αποτελούν συστήματα τα οποία χαρακτηρίζονται ως σχεδόν μη κανονικά-μη ελέγξιμα. Η σχεδόν μη κανονικότητα-μη ελεγκσιμότητα των πραγματικών οικονομικών συστημάτων εξηγεί, με τη σειρά της, τα σχήματα των εμπειρικών καμπυλών τιμών εμπορευμάτων-χρηματικού ωρομισθίου-ποσοστού κέρδους.

Οι μελλοντικές μελέτες θα πρέπει να εστιάσουν στη διερεύνηση του βαθμού κανονικότητας-ελεγκσιμότητας των οικονομικών συστημάτων από δεδομένα που προέρχονται από πίνακες εισροών-εκροών συμπαραγωγής πραγματικών οικονομιών, καθότι οι εν λόγω πίνακες περιγράφουν πιο πραγματοκρατικά τα υφιστάμενα οικονομικά συστήματα.

Αναφορές

- Bidard, C., & Salvadori, N. (1995). Duality between prices and techniques. *European Journal of Political Economy*, 11(2), 379-389.
- Boley, D. L., & Lu, W.-S. (1986). Measuring How Far a Controllable System is from an Uncontrollable One. *Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Automatic Control*, 31(3), 249-251.
- Ford, D. A., & Johnson, C. D. (1968). Invariant subspaces and the controllability and observability of linear dynamical systems. *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Control*, 6(4), 553-558.
- Iliadi, F., Mariolis, T., Soklis, G., & Tsoulfidis, L. (2014). Bienenfeld's approximation of production prices and eigenvalue distribution: further evidence from five European economies. *Contribution to Political Economy*, 33, 35-54.
- Kalman, R. E. (1960). On the General Theory of Control Systems. *International Federation of Automatic of Control Proceedings Volumes*, 1(1), 491-502.
- Kurz, H. D., & Salvadori, N. (1995). *Theory of production. A long-period analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Luenberger, D. D. (1979). *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models and Applications*. New York: John Wiley and Sons.
- Mariolis, T. (2003). Controllability, observability, regularity, and the so-called problem of transforming values into prices of production. *Asian African Journal of Economics and Econometrics*, 3(2), 113-127.
- Mariolis, T. (2019). The Location of the Value Theories in the Complex Plane and the Degree of Regularity-Controllability of Actual Economies. *Mimeo*.
- Mariolis, T., & Tsoulfidis, L. (2011). Eigenvalue Distribution and the Production Price-Profit Rate Relationship: Theory and Empirical Evidence. *Evolutionary and Institutional Economics Review*, 8(1), 87-122.
- Mariolis, T., & Tsoulfidis, L. (2014). On Bródy's conjecture: Theory, facts and figures about instability of the US economy. *Economic Systems Research*, 26(2), 209-223.
- Mariolis, T., & Tsoulfidis, L. (2016a). *Modern Classical Economics and Reality. A Spectral Analysis of the Theory of Value and Distribution*. Tokyo: Springer.
- Mariolis, T., & Tsoulfidis, L. (2016b). Capital theory 'paradoxes' and paradoxical results: resolved or continued. *Evolutionary and Institutional Economics Review*, 13(2), 297-322.

- Mariolis, T., & Tsoulfidis, L. (2018). Less is more: Capital theory and almost irregular-uncontrollable actual economies. *Contribution to Political Economy*, 37(1), 65-88.
- Meyer, C. D. (2001). *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. New York: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Miller, R. E., & Blair, P. D. (2009). *Input-Output Analysis, Foundations and Extensions* (2nd ed.). New York: Cambridge University Press.
- Miyao, T. (1977). A Generalization of Sraffa's Standard Commodity and Its Complete Characterization. *International Economic Review*, 18(1), 151-162.
- Pasinetti, L. L. (1973). The notion of vertical integration in economic analysis. *Metroeconomica*, XXV, 1-29.
- Pasinetti, L. L. (1977). *Lectures on the Theory of Production*. New York: Columbia University Press.
- Schefold, B. (1971). *Mr. Sraffa on Joint Production* (Ph.D. Thesis). Basle: University of Basle.
- Sraffa, P. (1960). *Production of Commodities by Means of Commodities. Prelude to a Critique of Economic Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Timmer, M. P., Dietzenbacher, E., Los, B., Stehrer, R., & de Vries, G. J. (2015). An Illustrated User Guide to the World Input–Output Database: the Case of Global Automotive Production. *Review of International Economics*(23), 575-605.
- Tsoulfidis, L., & Mariolis, T. (2007). Labour Values, Prices of Production and the Effects of Income Distribution: Evidence from the Greek Economy. *Economic System Research*, 19(4), 425-437.
- World Input-Output Database*. (2019, June 9). Ανάκτηση από WIOD Data, 2016 Release: <http://wiod.org/database/niots16> & <http://www.wiod.org/database/seas16>
- Μαριόλης, Θ. (2012). *Δοκίμια στη Λογική Ιστορία της Πολιτικής Οικονομίας*. Αθήνα: Matura.

Παράρτημα Α. Σχετικά με τα δεδομένα

Παρακάτω παρατίθενται οι χώρες για τις οποίες αφαιρέθηκαν κλάδοι οι οποίοι είτε παρουσιάζουν μηδενική εκροή εμπορεύματος και μηδενική εισροή εργασίας, είτε η εκροή τους ισούται με την προστιθέμενη αξία τους.

(i). Αυστραλία. Για όλα τα έτη οι πίνακες και τα διανύσματα είναι διαστάσεων 50×50 και 1×50 , αντίστοιχα. Αφαιρέθηκαν οι κλάδοι C33, M71, M72, M73 και M74_M75.

(ii). Βραζιλία. Για όλα τα έτη οι πίνακες και τα διανύσματα είναι διαστάσεων 47×47 και 1×47 , αντίστοιχα. Αφαιρέθηκαν οι κλάδοι C33, E37_E39, H53, K65, K66, M73 και M74_M75.

(iii). Δημοκρατία της Κορέας. Για όλα τα έτη οι πίνακες και τα διανύσματα είναι διαστάσεων 53×53 και 1×53 , αντίστοιχα. Αφαιρέθηκε ο κλάδος C33.

(iv). Ελβετία. Για όλα τα έτη οι πίνακες και τα διανύσματα είναι διαστάσεων 49×49 και 1×49 , αντίστοιχα. Αφαιρέθηκαν οι κλάδοι E37_E39, J59_J60, K66, M71 και M73.

(v). Ιαπωνία. Για όλα τα έτη οι πίνακες και τα διανύσματα είναι διαστάσεων 51×51 και 1×51 , αντίστοιχα. Αφαιρέθηκαν οι κλάδοι C33, K66, M69_M70 και M71.

(vi). Ινδία. Για όλα τα έτη οι πίνακες και τα διανύσματα είναι διαστάσεων 44×44 και 1×44 , αντίστοιχα. Αφαιρέθηκαν οι κλάδοι C33, E37_E39, H53, J58, J59_J60, K66, M72, M73, M74_M75 και O84.

(vii). Ινδονησία. Για όλα τα έτη οι πίνακες και τα διανύσματα είναι διαστάσεων 47×47 και 1×47 , αντίστοιχα. Αφαιρέθηκαν οι κλάδοι C33, E37_E39, K66, M71, M72, M73 και M74_M75.

(viii). Καναδάς. Για όλα τα έτη οι πίνακες και τα διανύσματα είναι διαστάσεων 51×51 και 1×51 , αντίστοιχα. Αφαιρέθηκαν οι κλάδοι C33, E36 και K66.

(ix). Κύπρος. Για τα έτη 2005 και 2010 οι πίνακες και τα διανύσματα είναι διαστάσεων 53×53 και 1×53 , αντίστοιχα. Αφαιρέθηκε ο κλάδος C19.

(x). Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας. Για όλα τα έτη οι πίνακες και τα διανύσματα είναι διαστάσεων 47×47 και 1×47 , αντίστοιχα. Αφαιρέθηκαν οι κλάδοι C33, G45, J58, J59_J60, K66, M71, M73.

(xi). Λουξεμβούργο. Για όλα τα έτη οι πίνακες και τα διανύσματα είναι διαστάσεων 52×52 και 1×52 , αντίστοιχα. Αφαιρέθηκαν οι κλάδοι A03 και C19.

(xii). Μάλτα. Για το έτος 2000 οι πίνακες και τα διανύσματα είναι διαστάσεων 51×51 και 1×51 , αντίστοιχα. Αφαιρέθηκαν οι κλάδοι A02, K66 και M72. Για το έτος 2005 οι

πίνακες και τα διανύσματα είναι διαστάσεων 53×53 και 1×53, αντίστοιχα. Αφαιρέθηκαν οι κλάδοι A02 και M72. Για τα έτη 2010 και 2014 οι πίνακες και τα διανύσματα είναι διαστάσεων 54×54 και 1×54, αντίστοιχα. Αφαιρέθηκε ο κλάδος A02.

(xiii). Μεξικό. Για όλα τα έτη οι πίνακες και τα διανύσματα είναι διαστάσεων 52×52 και 1×52, αντίστοιχα. Αφαιρέθηκαν οι κλάδοι L68 και M73.

(xiv). Ρωσία. Για όλα τα έτη οι πίνακες και τα διανύσματα είναι διαστάσεων 33×33 και 1×33, αντίστοιχα. Αφαιρέθηκαν οι κλάδοι A02, A03, C18, C21, C25, C27, C30, C33, E36, E37_E39, H53, J58, J59_J60, J62_J63, K65, K66, M69_M70, M71, M72, M73 και M74_M75

(xv). Σουηδία. Για όλα τα έτη οι πίνακες και τα διανύσματα είναι διαστάσεων 53×53 και 1×53, αντίστοιχα. Αφαιρέθηκε ο κλάδος H53.

(xvi). Τουρκία. Για όλα τα έτη οι πίνακες και τα διανύσματα είναι διαστάσεων 46×46 και 1×46, αντίστοιχα. Αφαιρέθηκαν οι κλάδοι C21, C33, H53, J58, J59_J60, M69_M70, M71 και M73.

Πίνακας 1. Ταξινόμηση Κλάδων

A/A	Κωδικός	Περιγραφή	
1	A01	Crop and animal production, hunting and related service activities	Προϊόντα φυτικής και ζωικής παραγωγής, θήρας και συναφών δραστηριοτήτων
2	A02	Forestry and logging	Προϊόντα δασοκομίας και υλοτομίας
3	A03	Fishing and aquaculture	Προϊόντα αλιείας και υδατοκαλλιέργειας
4	B	Mining and quarrying	Προϊόντα εξορυκτικής και λατομικής δραστηριότητας
5	C10-C12	Manufacture of food products, beverages and tobacco products	Τρόφιμα, ποτά και προϊόντα καπνού
6	C13-C15	Manufacture of textiles, wearing apparel and leather products	Κλωστοϋφαντουργικά προϊόντα, ενδύματα και δερμάτινα είδη
7	C16	Manufacture of wood and of products of wood and cork, except furniture; manufacture of articles of straw and plaiting materials	Προϊόντα ξύλου (εκτός των επίπλων), είδη καλαθοποιίας και σπαστοπλεκτικής
8	C17	Manufacture of paper and paper products	Προϊόντα χαρτιού
9	C18	Printing and reproduction of recorded media	Εκτυπώσεις και αναπαραγωγή προεγγεγραμμένων μέσων
10	C19	Manufacture of coke and refined petroleum products	Παραγωγή οπτάνθρακα και προϊόντων διύλισης πετρελαίου
11	C20	Manufacture of chemicals and chemical products	Χημικές ουσίες και προϊόντα

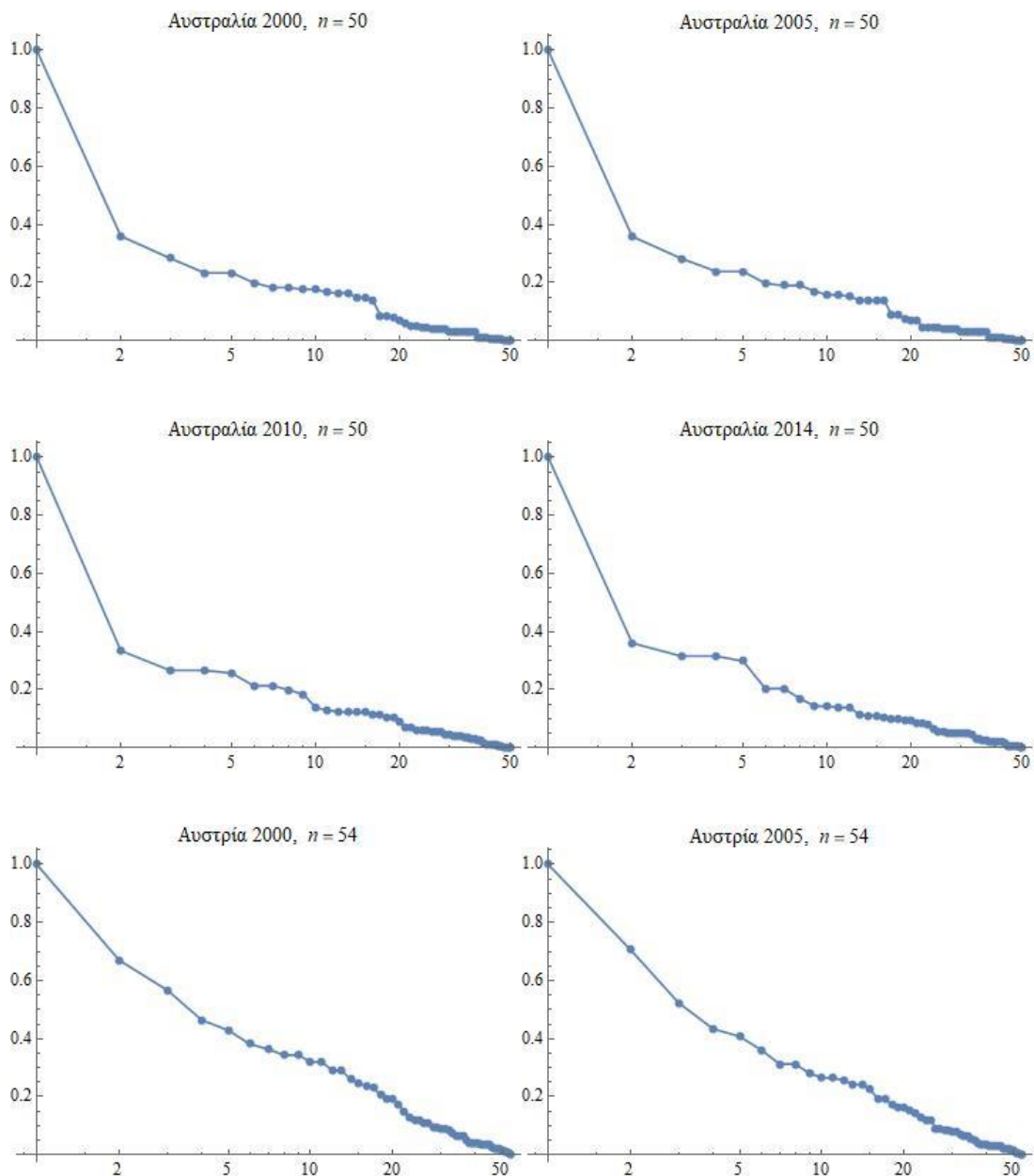
12	C21	Manufacture of basic pharmaceutical products and pharmaceutical preparations	Βασικά φαρμακευτικά προϊόντα και σκευάσματα
13	C22	Manufacture of rubber and plastic products	Προϊόντα από ελαστικό (καουτσούκ) και πλαστικές ύλες
14	C23	Manufacture of other non-metallic mineral products	Άλλα προϊόντα μη μεταλλικών ορυκτών
15	C24	Manufacture of basic metals	Βασικά μέταλλα
16	C25	Manufacture of fabricated metal products, except machinery and equipment	Μεταλλικά προϊόντα (εκτός μηχανημάτων)
17	C26	Manufacture of computer, electronic and optical products	Ηλεκτρονικοί υπολογιστές, ηλεκτρονικά και οπτικά προϊόντα
18	C27	Manufacture of electrical equipment	Ηλεκτρολογικός εξοπλισμός
19	C28	Manufacture of machinery and equipment n.e.c.	Μηχανήματα και είδη εξοπλισμού π.δ.κ.α.
20	C29	Manufacture of motor vehicles, trailers and semi-trailers	Μηχανοκίνητα οχήματα, ρυμουλκούμενα και ημιρυμουλκούμενα οχήματα
21	C30	Manufacture of other transport equipment	Λοιπός εξοπλισμός μεταφορών
22	C31_C32	Manufacture of furniture; other manufacturing	Έπιπλα και προϊόντα λοιπών μεταποιητικών δραστηριοτήτων
23	C33	Repair and installation of machinery and equipment	Υπηρεσίες επισκευής και εγκατάστασης μηχανημάτων και εξοπλισμού
24	D35	Electricity, gas, steam and air conditioning supply	Ηλεκτρικό ρεύμα, φυσικό αέριο, ατμός και κλιματισμός
25	E36	Water collection, treatment and supply	Φυσικό νερό, υπηρεσίες επεξεργασίας και παροχής νερού
26	E37-E39	Sewerage; waste collection, treatment and disposal activities; materials recovery; remediation activities and other waste management services	Υπηρεσίες συλλογής, επεξεργασίας και διάθεσης απορριμμάτων, ανάκτησης υλικών, εξυγίανσης και άλλες υπηρεσίες διαχείρισης αποβλήτων
27	F	Construction	Κατασκευές
28	G45	Wholesale and retail trade and repair of motor vehicles and motorcycles	Υπηρεσίες χονδρικού και λιανικού εμπορίου και υπηρεσίες επισκευής μηχανοκίνητων οχημάτων και μοτοσυκλετών
29	G46	Wholesale trade, except of motor vehicles and motorcycles	Υπηρεσίες χονδρικού εμπορίου εκτός των μηχανοκίνητων οχημάτων και μοτοσυκλετών
30	G47	Retail trade, except of motor vehicles and motorcycles	Υπηρεσίες λιανικού εμπορίου εκτός των μηχανοκίνητων οχημάτων και μοτοσυκλετών
31	H49	Land transport and transport via pipelines	Υπηρεσίες χερσαίων μεταφορών και μεταφορών μέσω αγωγών
32	H50	Water transport	Υπηρεσίες πλωτών μεταφορών
33	H51	Air transport	Υπηρεσίες αεροπορικών μεταφορών
34	H52	Warehousing and support activities for transportation	Υπηρεσίες αποθήκευσης και υποστήριξης των μεταφορών

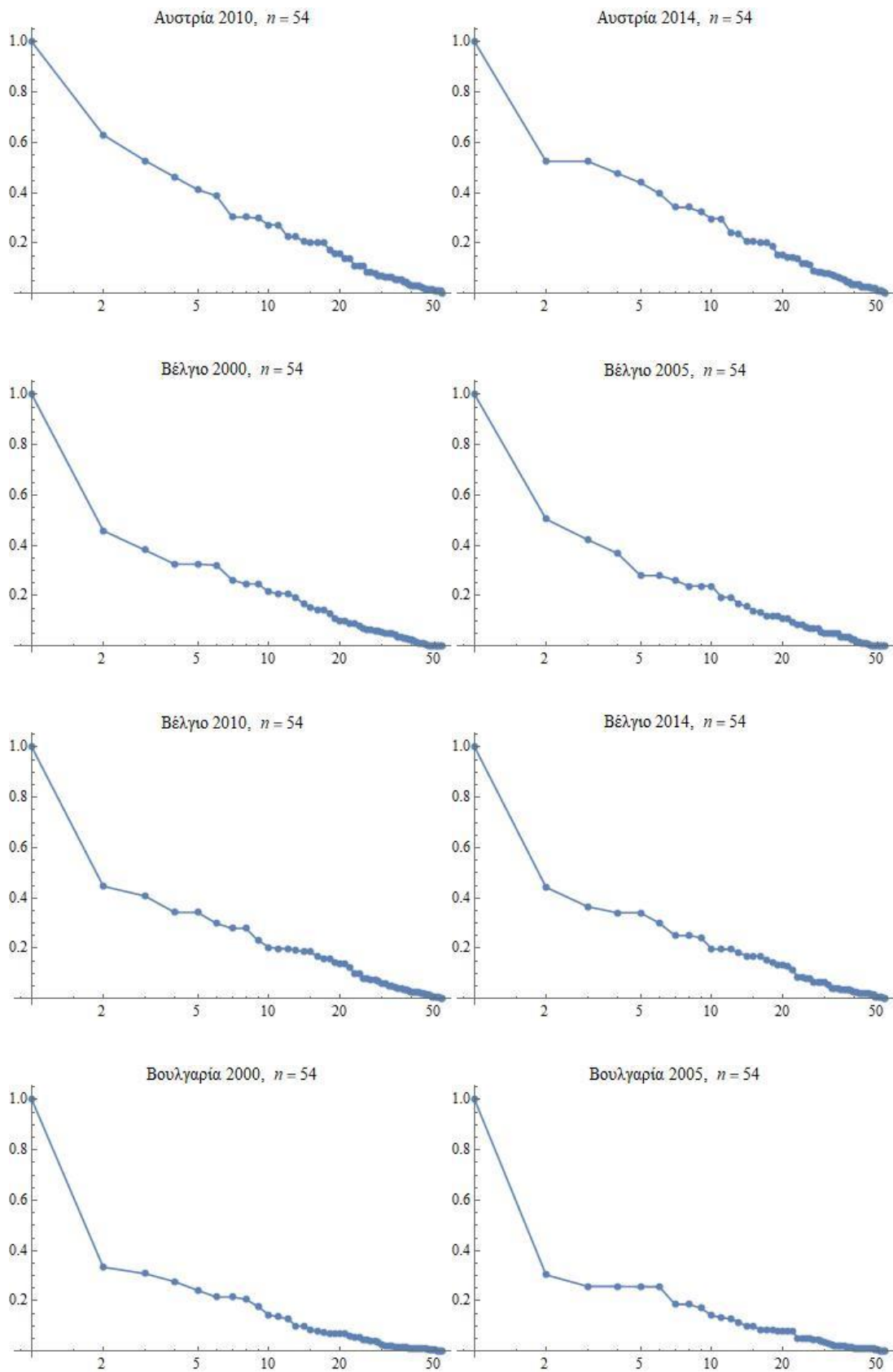
35	H53	Postal and courier activities	Ταχυδρομικές και ταχυμεταφορικές υπηρεσίες
36	I	Accommodation and food service activities	Υπηρεσίες παροχής καταλύματος και εστίασης
37	J58	Publishing activities	Εκδοτικές υπηρεσίες
38	J59_J60	Motion picture, video and television programme production, sound recording and music publishing activities; programming and broadcasting activities	Υπηρεσίες παραγωγής κινηματογραφικών ταινιών, βίντεο, τηλεοπτικών προγραμμάτων, ηχογραφήσεων, μουσικών εκδόσεων, προγραμματισμού και τηλεοπτικών εκπομπών
39	J61	Telecommunications	Τηλεπικοινωνιακές υπηρεσίες
40	J62_J63	Computer programming, consultancy and related activities; information service activities	Υπηρεσίες προγραμματισμού ηλεκτρονικών υπολογιστών, παροχής συμβουλών και άλλων συναφών δραστηριοτήτων, και υπηρεσίες πληροφοριών
41	K64	Financial service activities, except insurance and pension funding	Χρηματοπιστωτικές υπηρεσίες, με εξαίρεση τις ασφαλιστικές δραστηριότητες και τα συνταξιοδοτικά προγράμματα
42	K65	Insurance, reinsurance and pension funding, except compulsory social security	Υπηρεσίες ασφαλιστικών, αντασφαλιστικών και συνταξιοδοτικών ταμείων, εκτός από την υποχρεωτική κοινωνική ασφάλιση
43	K66	Activities auxiliary to financial services and insurance activities	Υπηρεσίες συναφείς προς τις χρηματοπιστωτικές υπηρεσίες και τις ασφαλιστικές δραστηριότητες
44	L68	Real estate activities	Υπηρεσίες διαχείρισης ακίνητης περιουσίας
45	M69_M70	Legal and accounting activities; activities of head offices; management consultancy activities	Νομικές και λογιστικές υπηρεσίες και υπηρεσίες κεντρικών γραφείων και παροχής συμβουλών διαχείρισης
46	M71	Architectural and engineering activities; technical testing and analysis	Αρχιτεκτονικές και μηχανολογικές υπηρεσίες και υπηρεσίες τεχνικών δοκιμών και αναλύσεων
47	M72	Scientific research and development	Υπηρεσίες επιστημονικής έρευνας και ανάπτυξης
48	M73	Advertising and market research	Υπηρεσίες διαφήμισης και έρευνας αγοράς
49	M74_M75	Other professional, scientific and technical activities; veterinary activities	Άλλες επαγγελματικές, επιστημονικές και τεχνικές υπηρεσίες, και κτηνιατρικές υπηρεσίες
50	N	Administrative and support service activities	Διοικητικές και υποστηρικτικές υπηρεσίες
51	O84	Public administration and defence; compulsory social security	Υπηρεσίες δημόσιας διοίκησης και άμυνας, υπηρεσίες υποχρεωτικής κοινωνικής ασφάλισης
52	P85	Education	Υπηρεσίες εκπαίδευσης
53	Q	Human health and social work activities	Υπηρεσίες ανθρώπινης υγείας και κοινωνικής μέριμνας
54	R_S	Other service activities	Άλλες δραστηριότητες παροχής υπηρεσιών

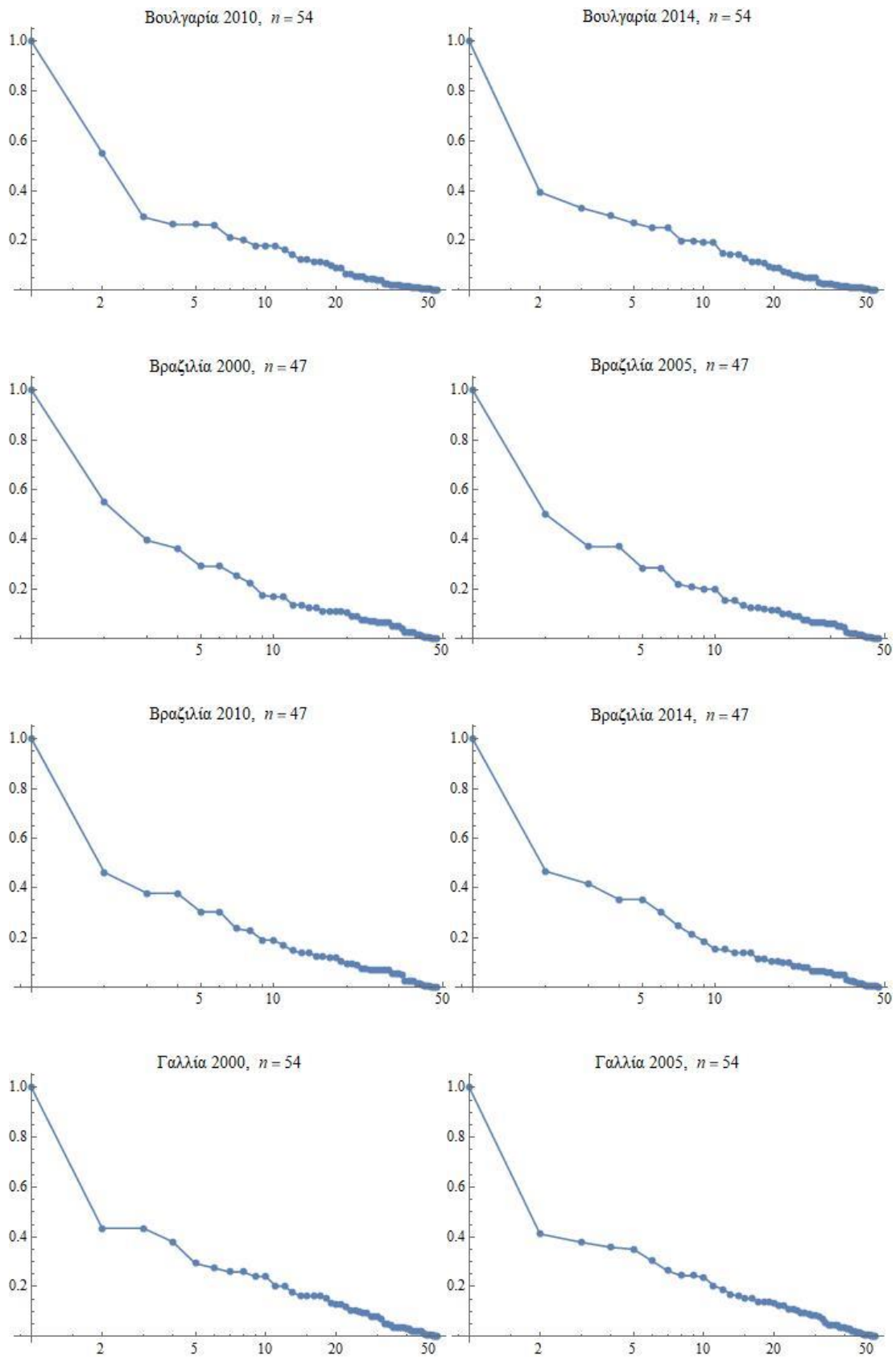
55	T	Activities of households as employers; undifferentiated goods- and services-producing activities of households for own use	Υπηρεσίες νοικοκυριών ως εργοδοτών, μη διακριτά αγαθά και υπηρεσίες που παράγονται από νοικοκυριά για ίδια χρήση
56	U	Activities of extraterritorial organizations and bodies	Υπηρεσίες εξωεδαφικών οργανώσεων και φορέων

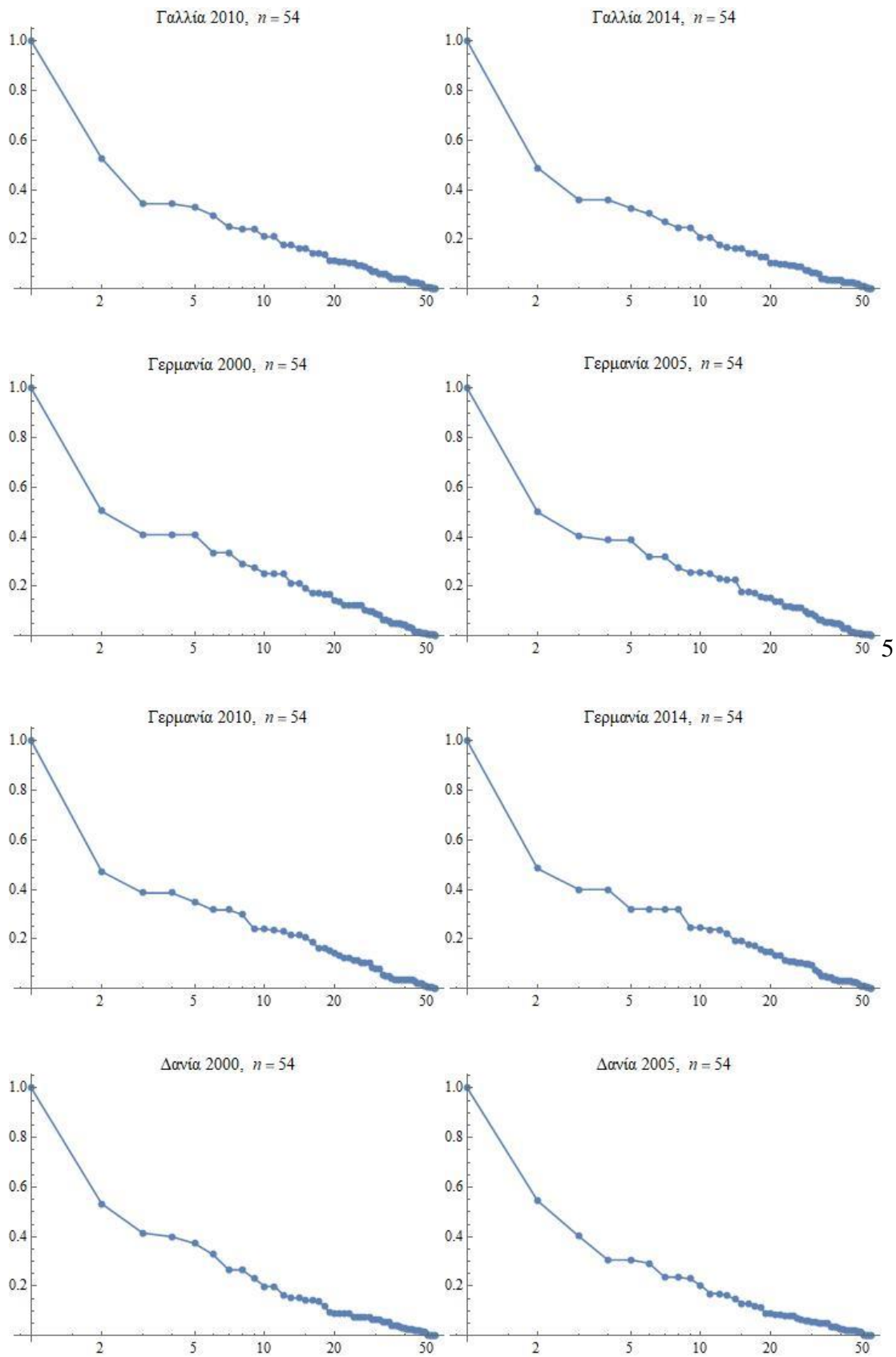
Παράρτημα Β. Τα μέτρα των ιδιοτιμών των μητρών \mathbf{J}

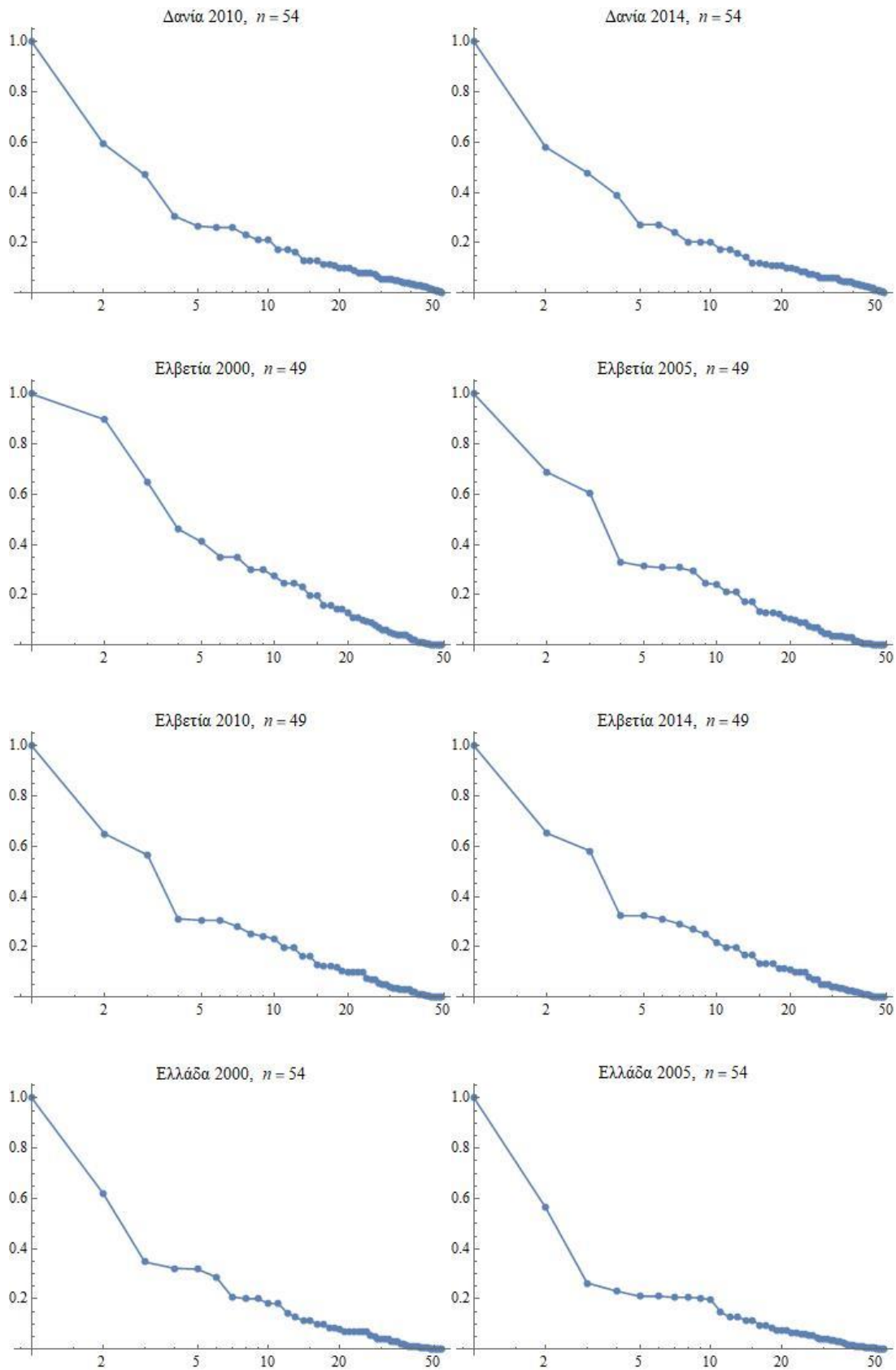
Παρακάτω παρατίθενται τα σχήματα στα οποία απεικονίζονται τα μέτρα των ιδιοτιμών των μητρών \mathbf{J} (ο οριζόντιος άξονας έχει σχεδιαστεί σε λογαριθμική κλίμακα) για τις 43 οικονομίες που εξετάζονται και για τα έτη 2000, 2005, 2010 και 2014 (στα σχήματα το n δηλώνει το πλήθος των ιδιοτιμών).

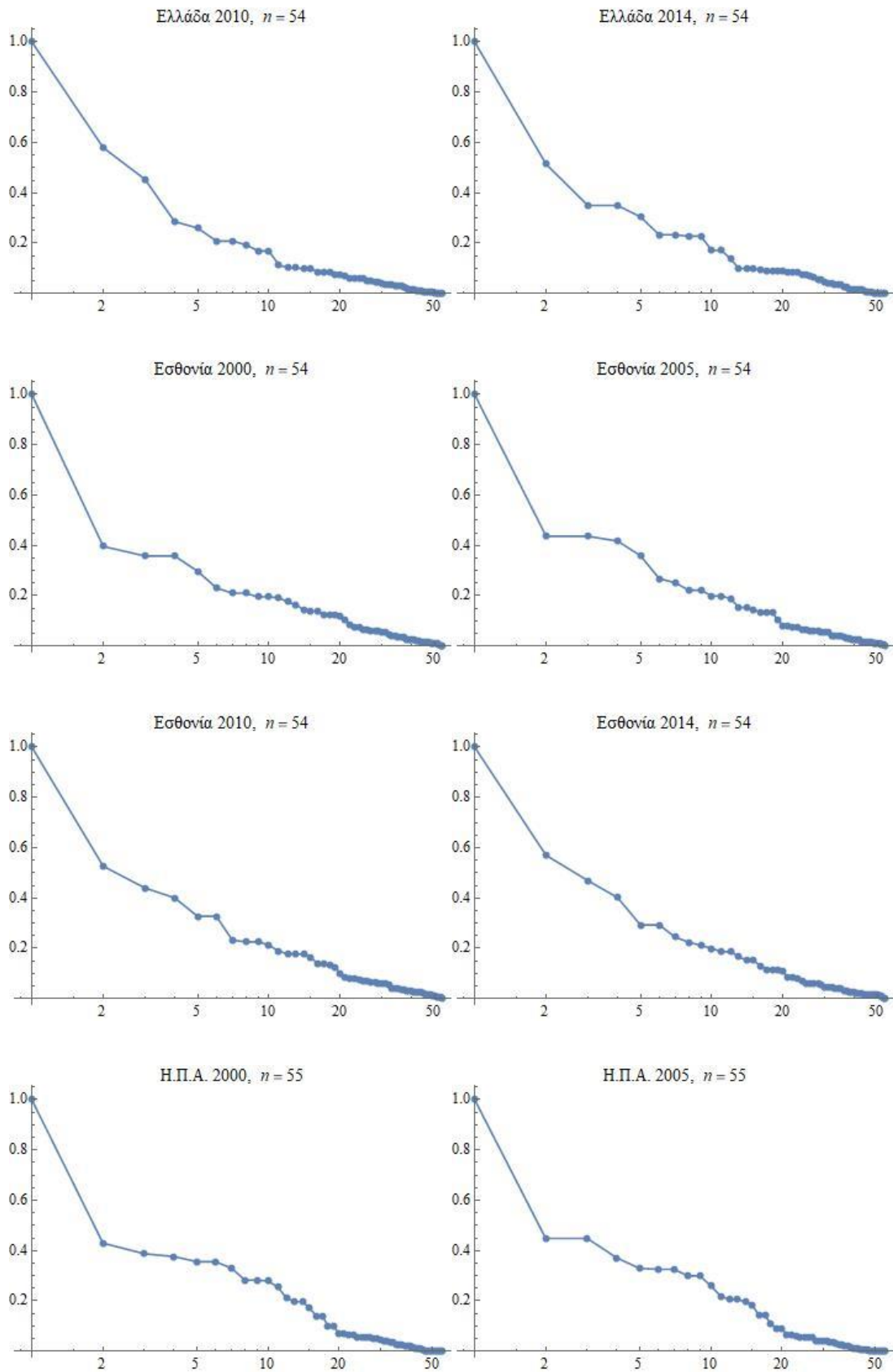


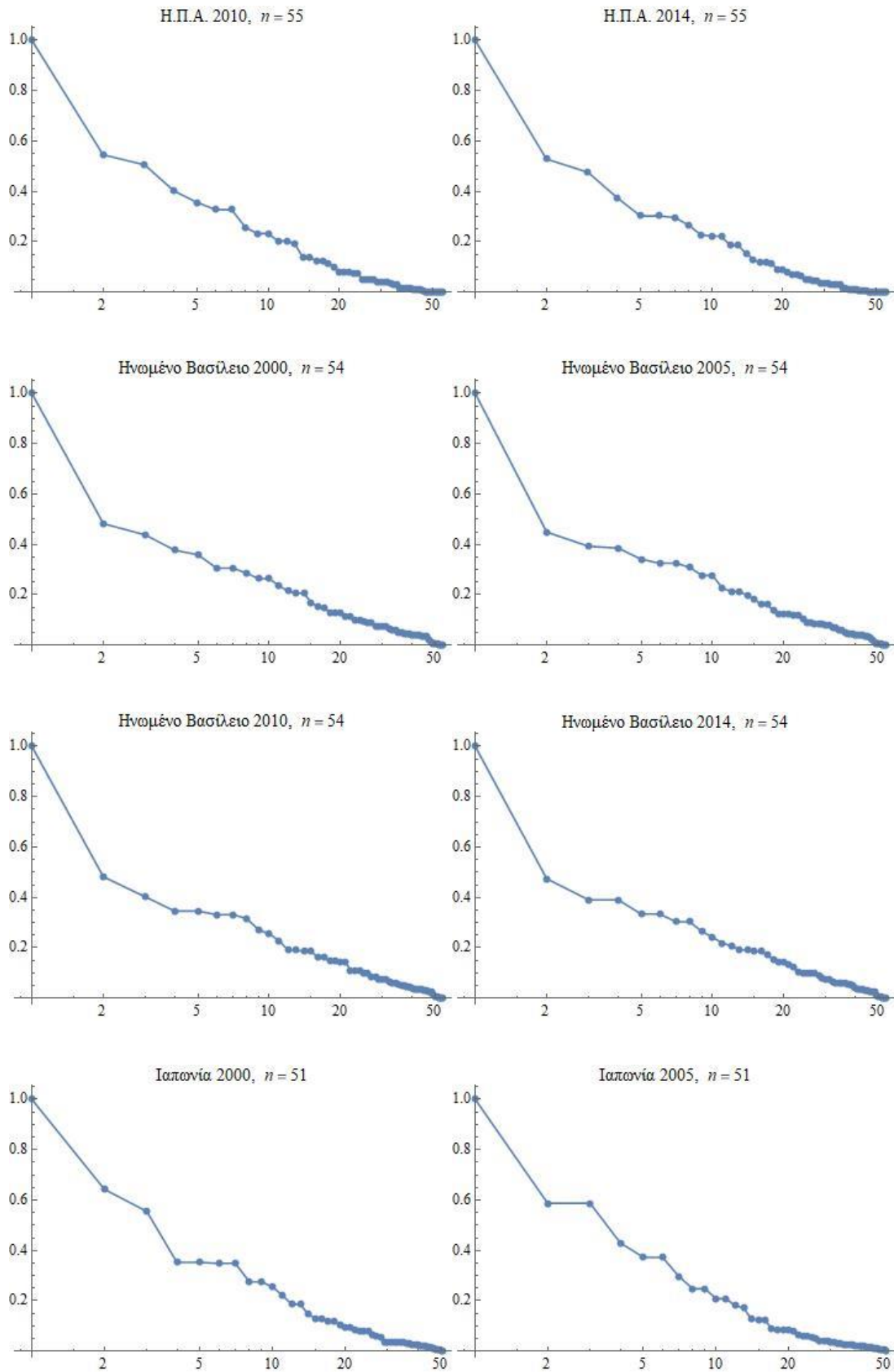


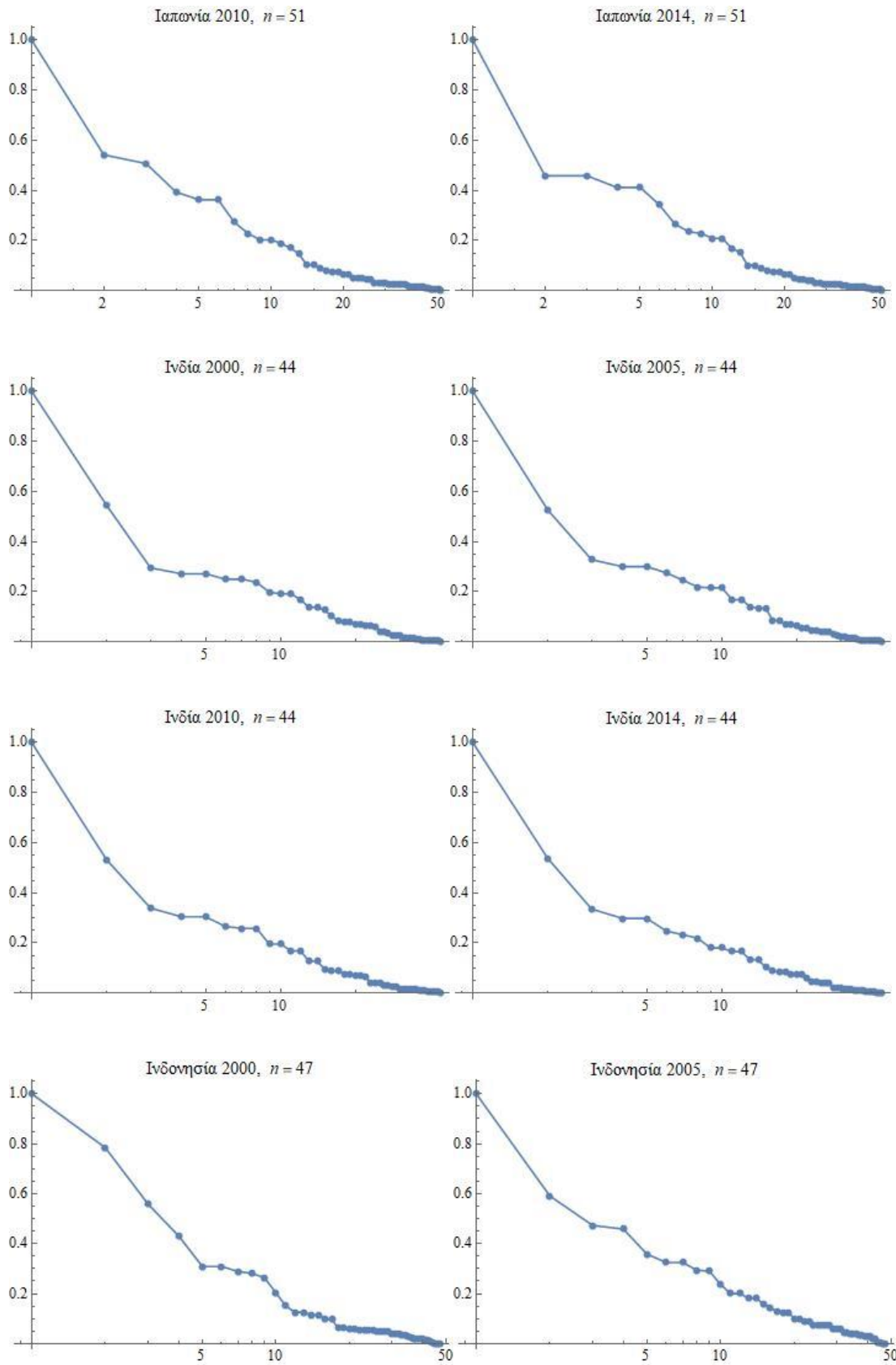


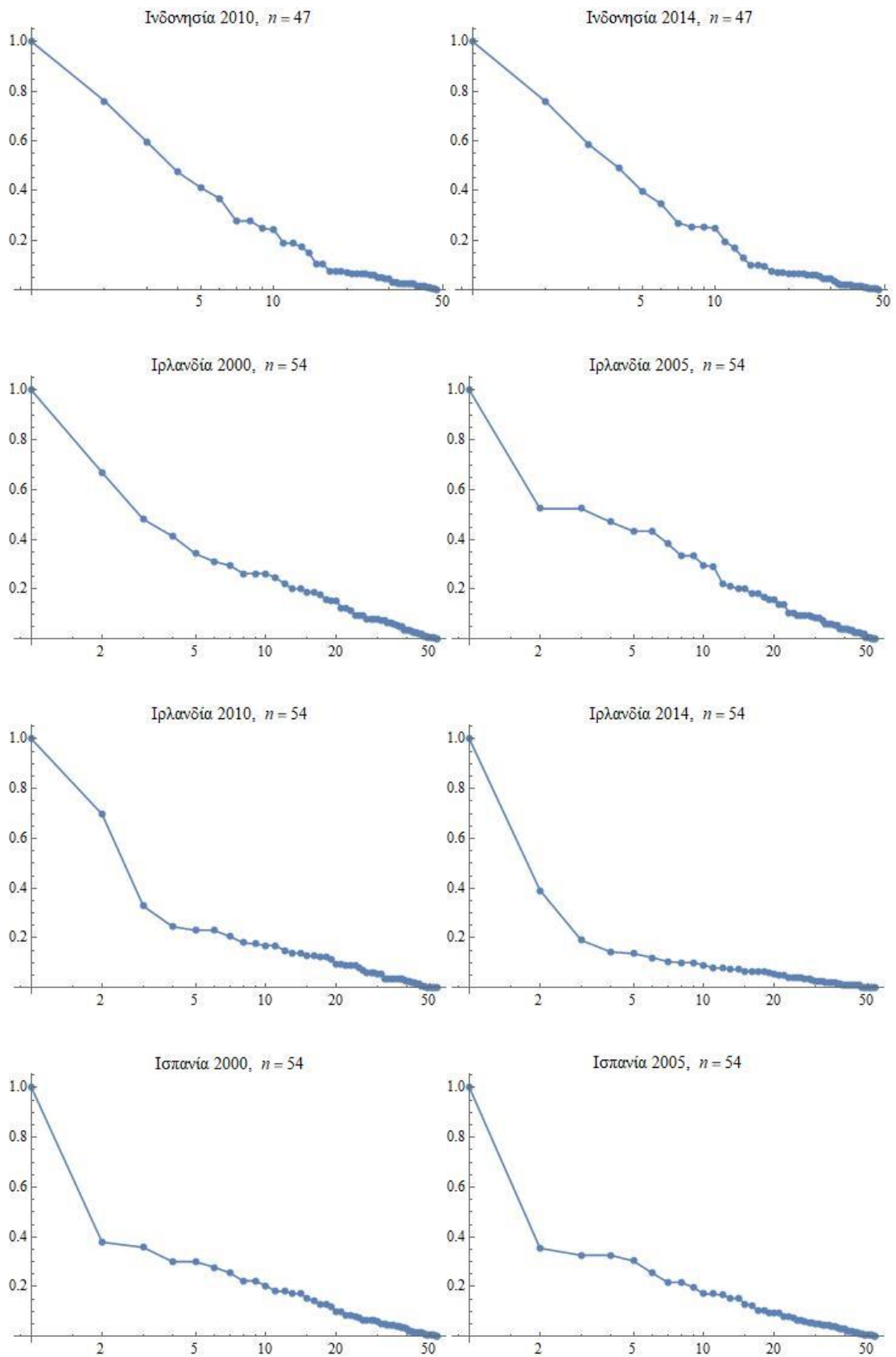


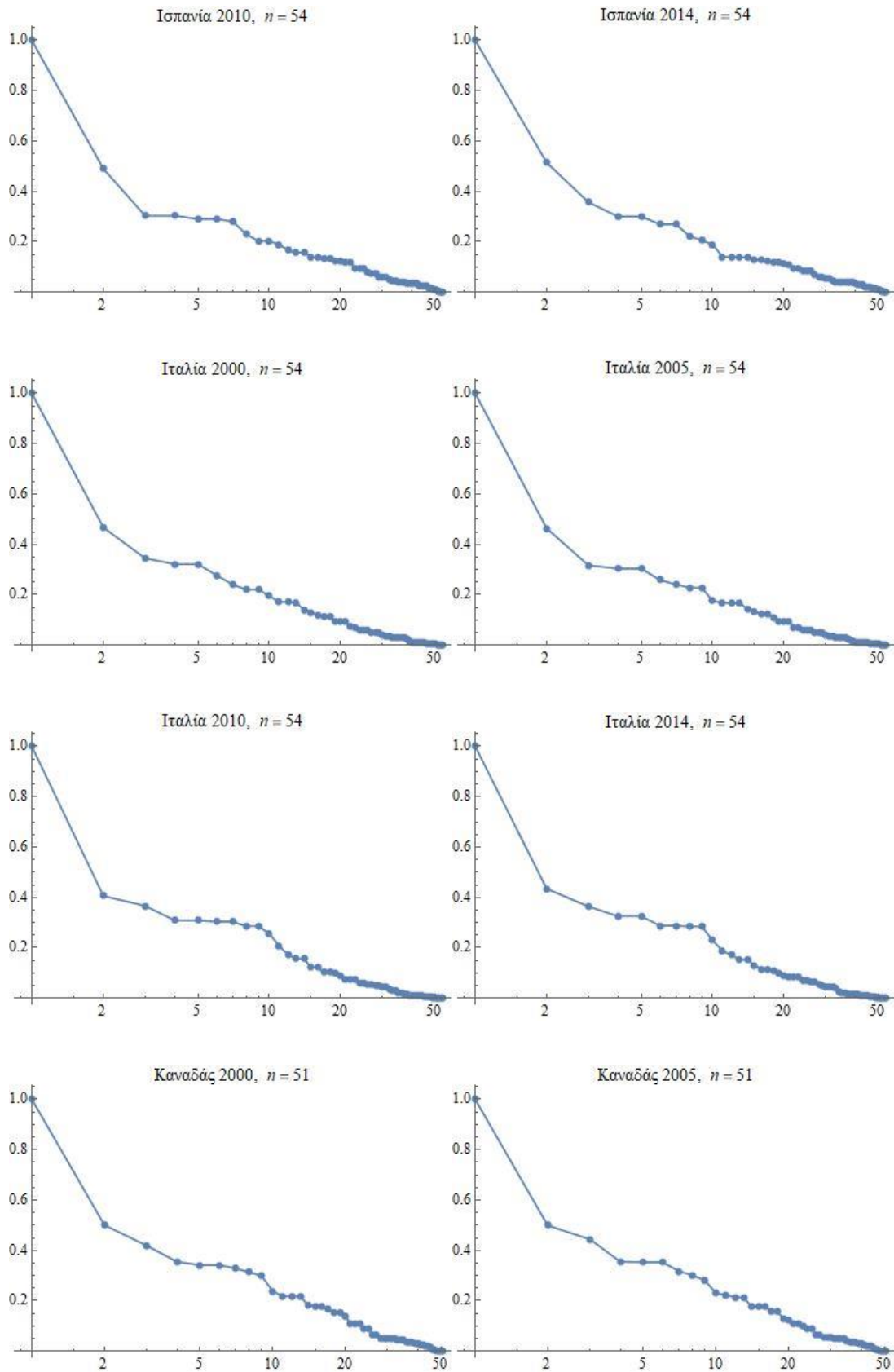


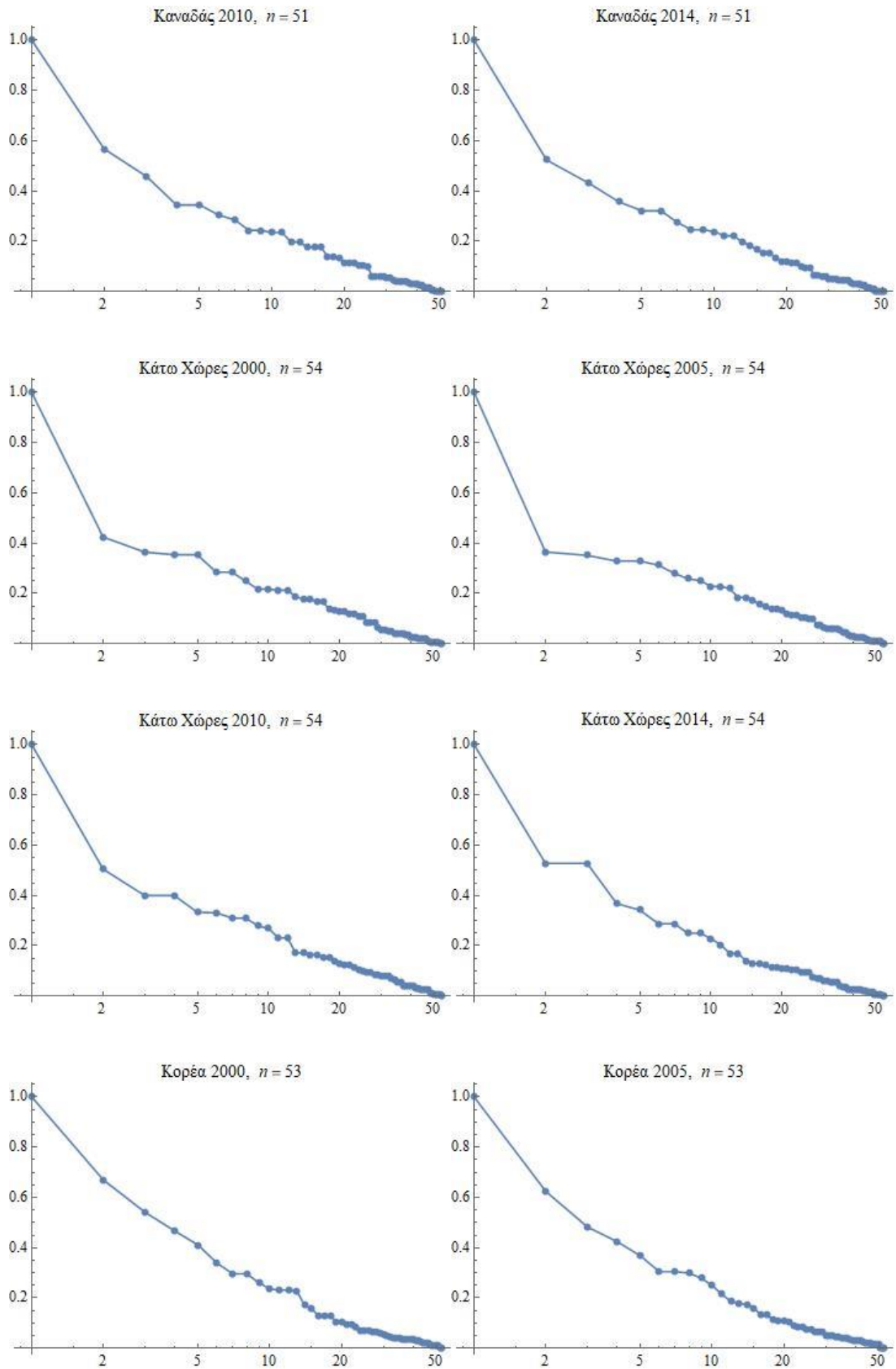


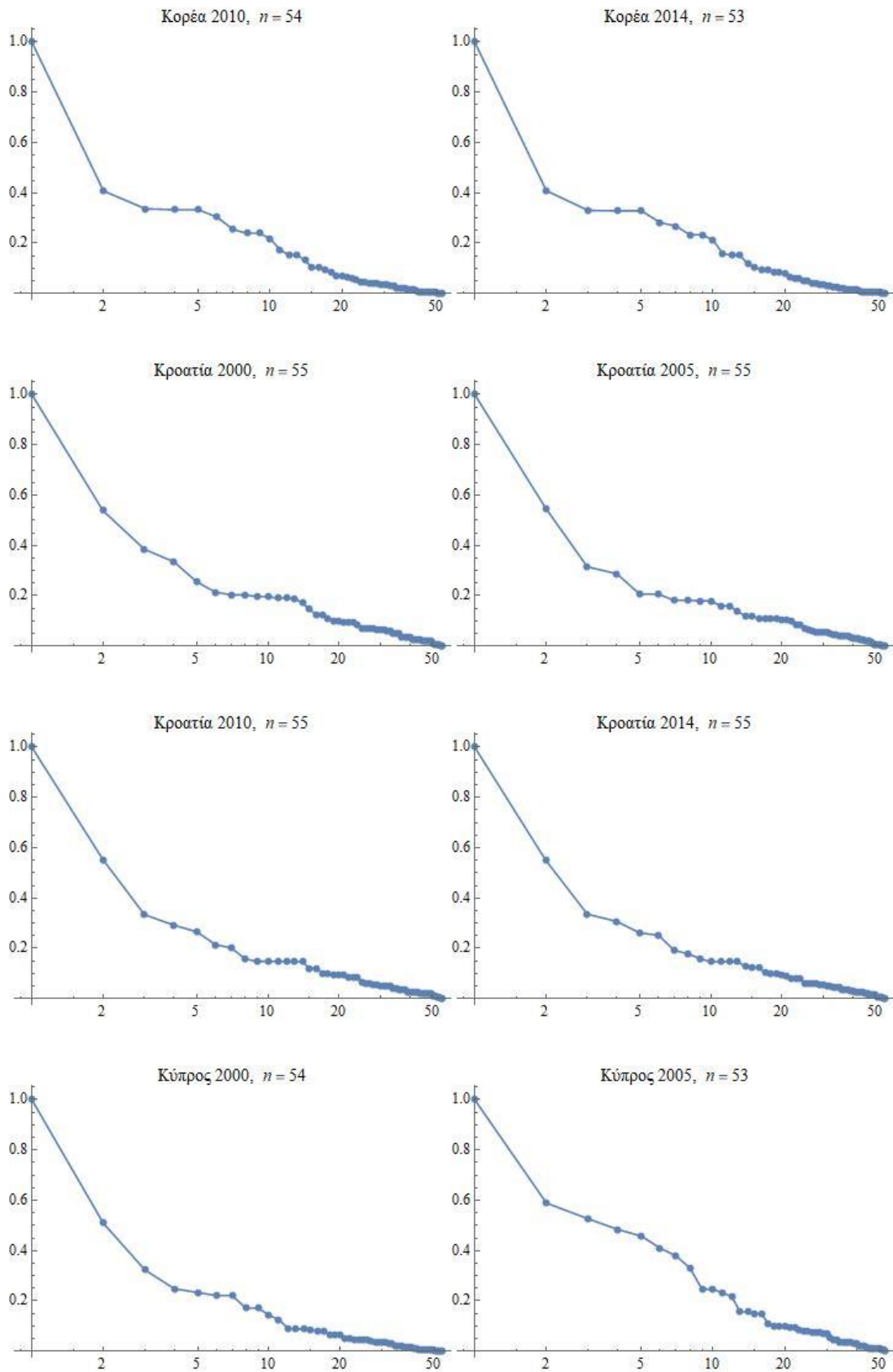


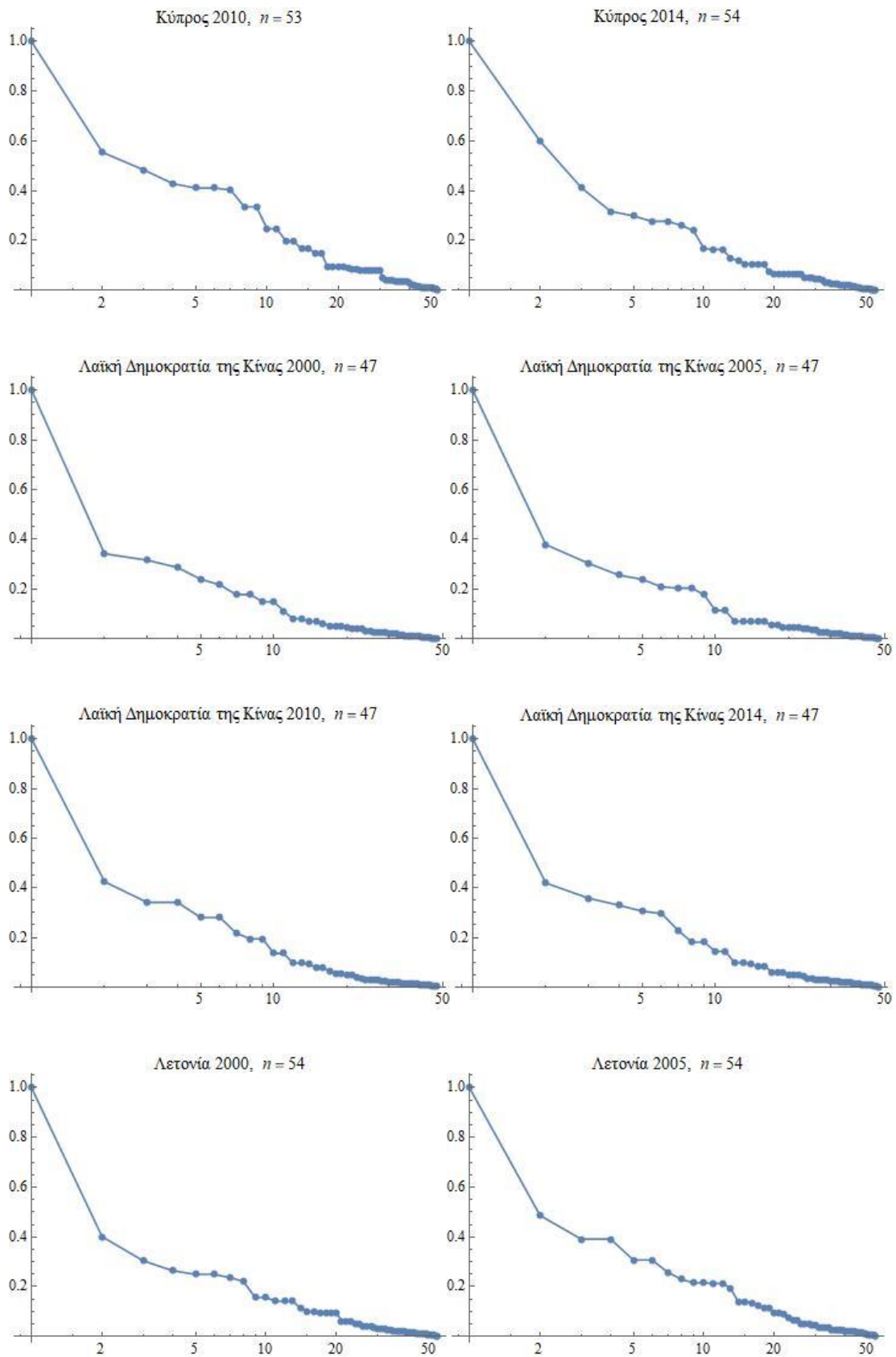


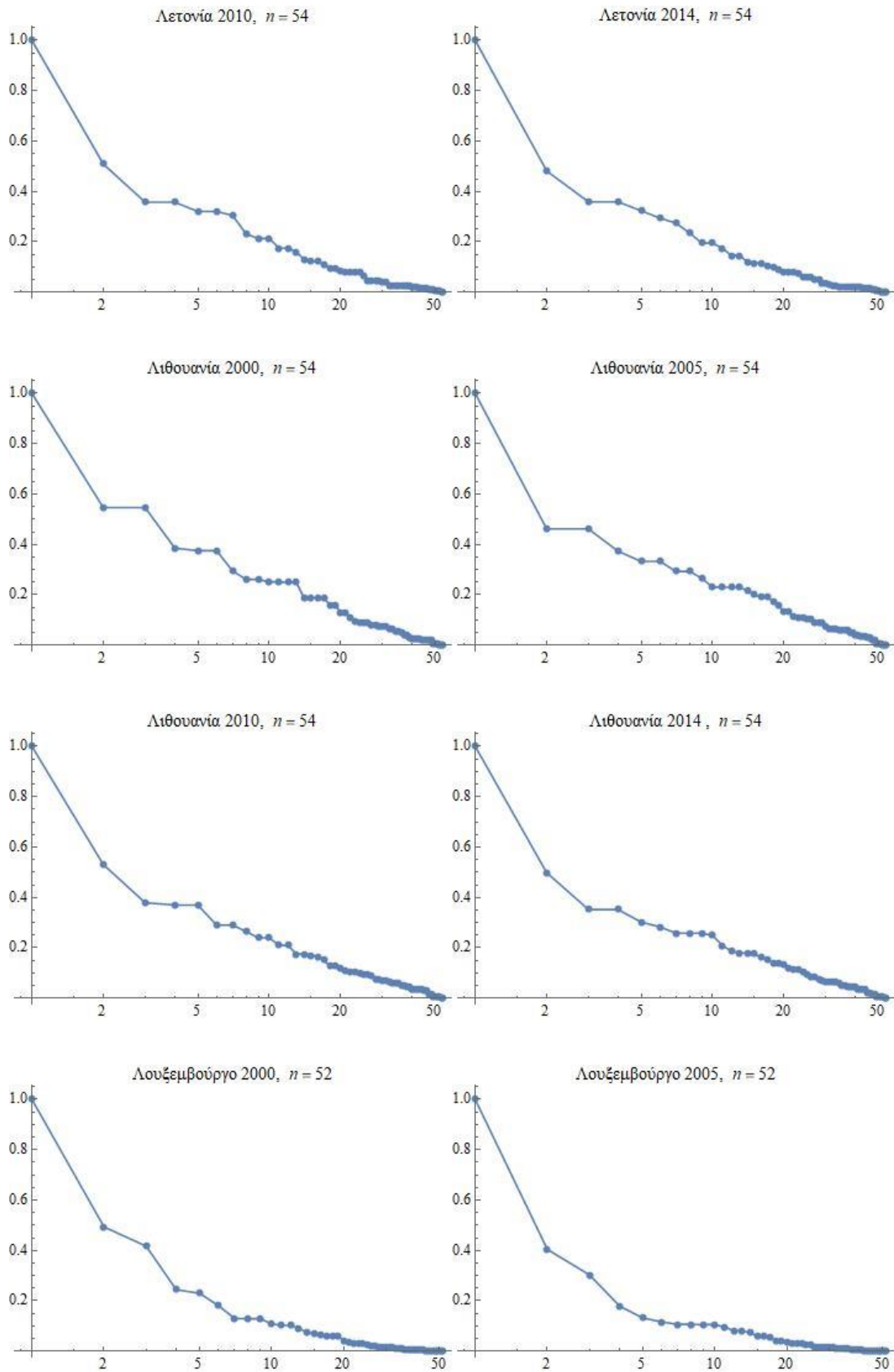


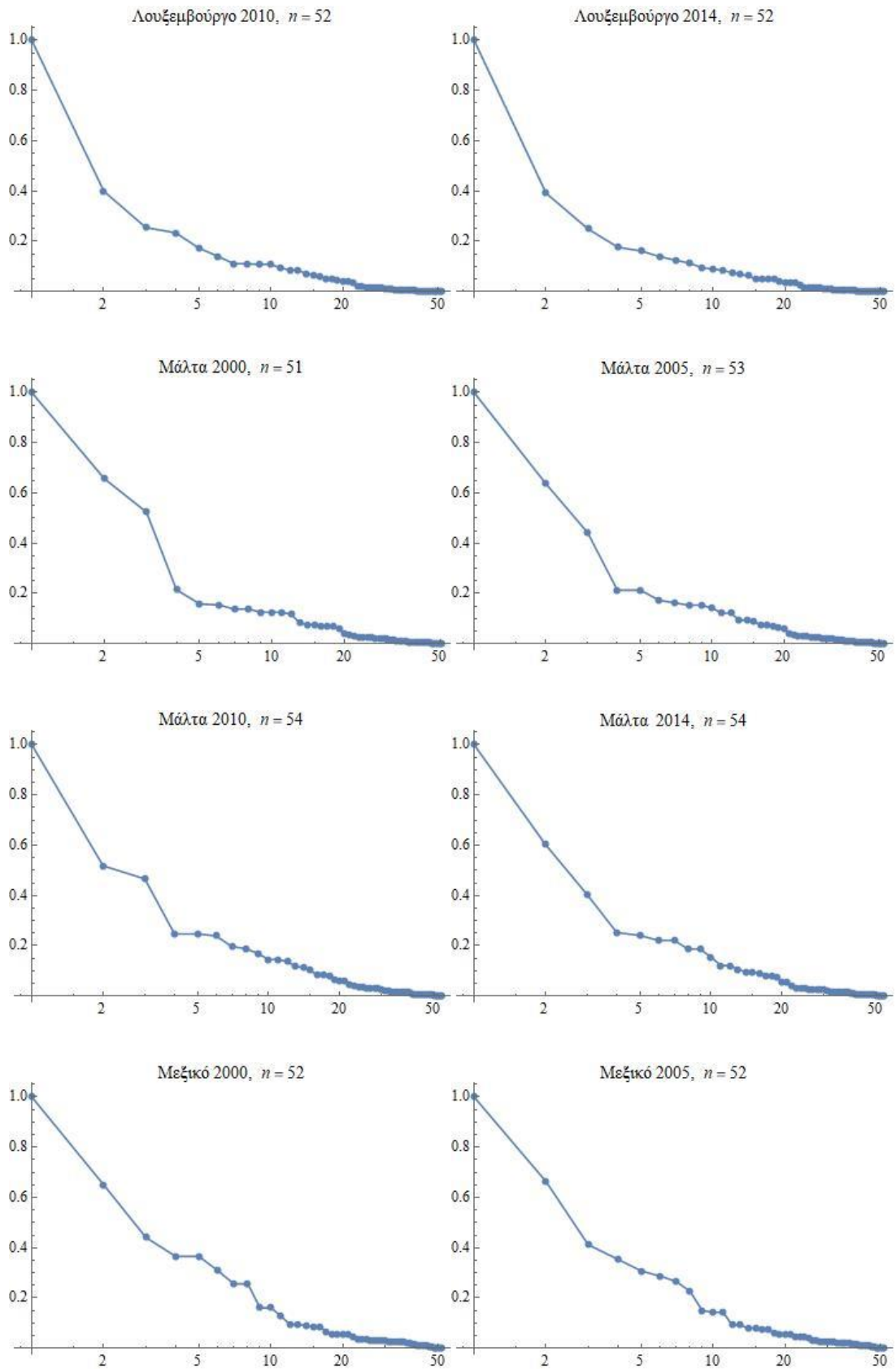


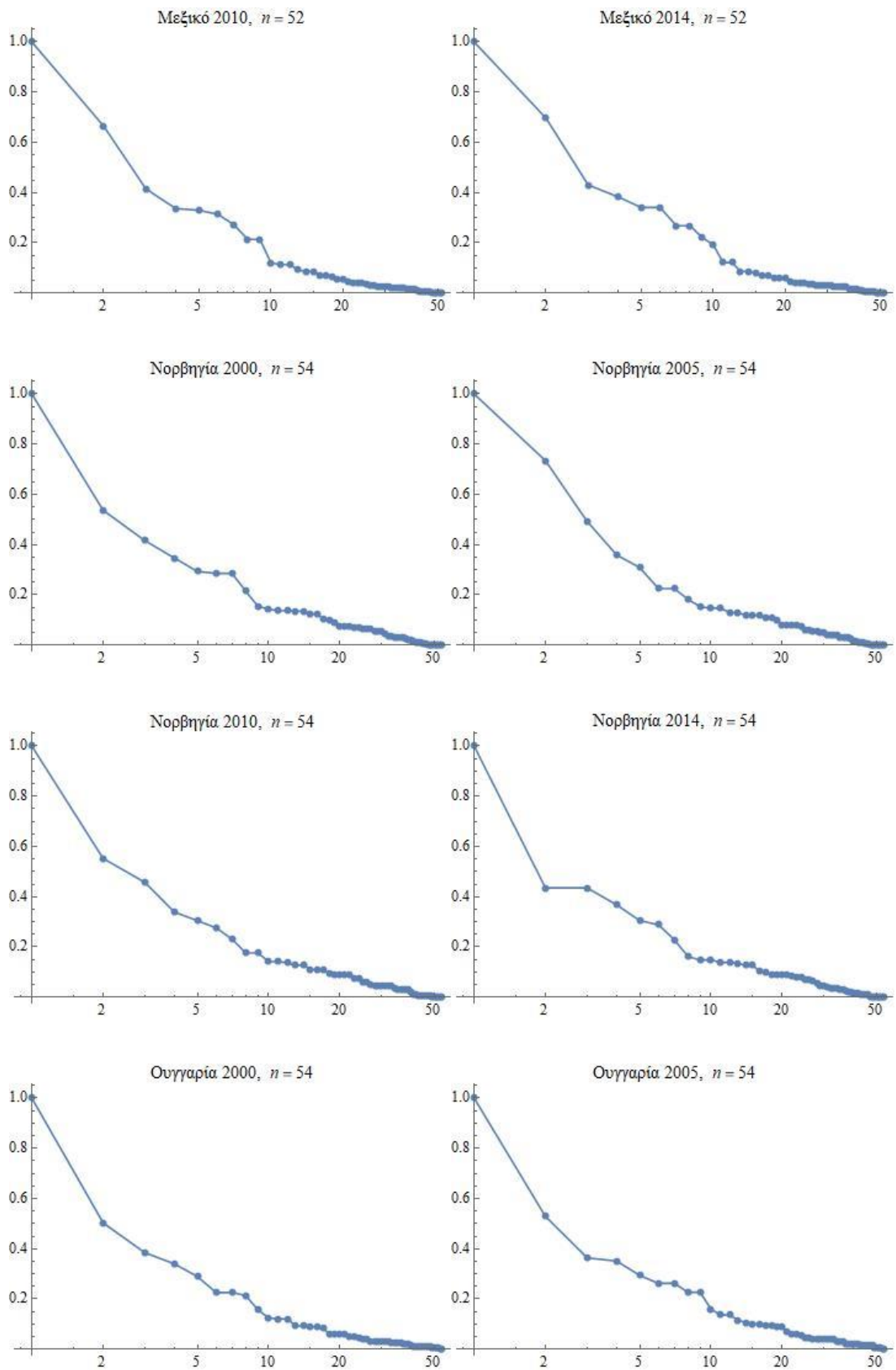


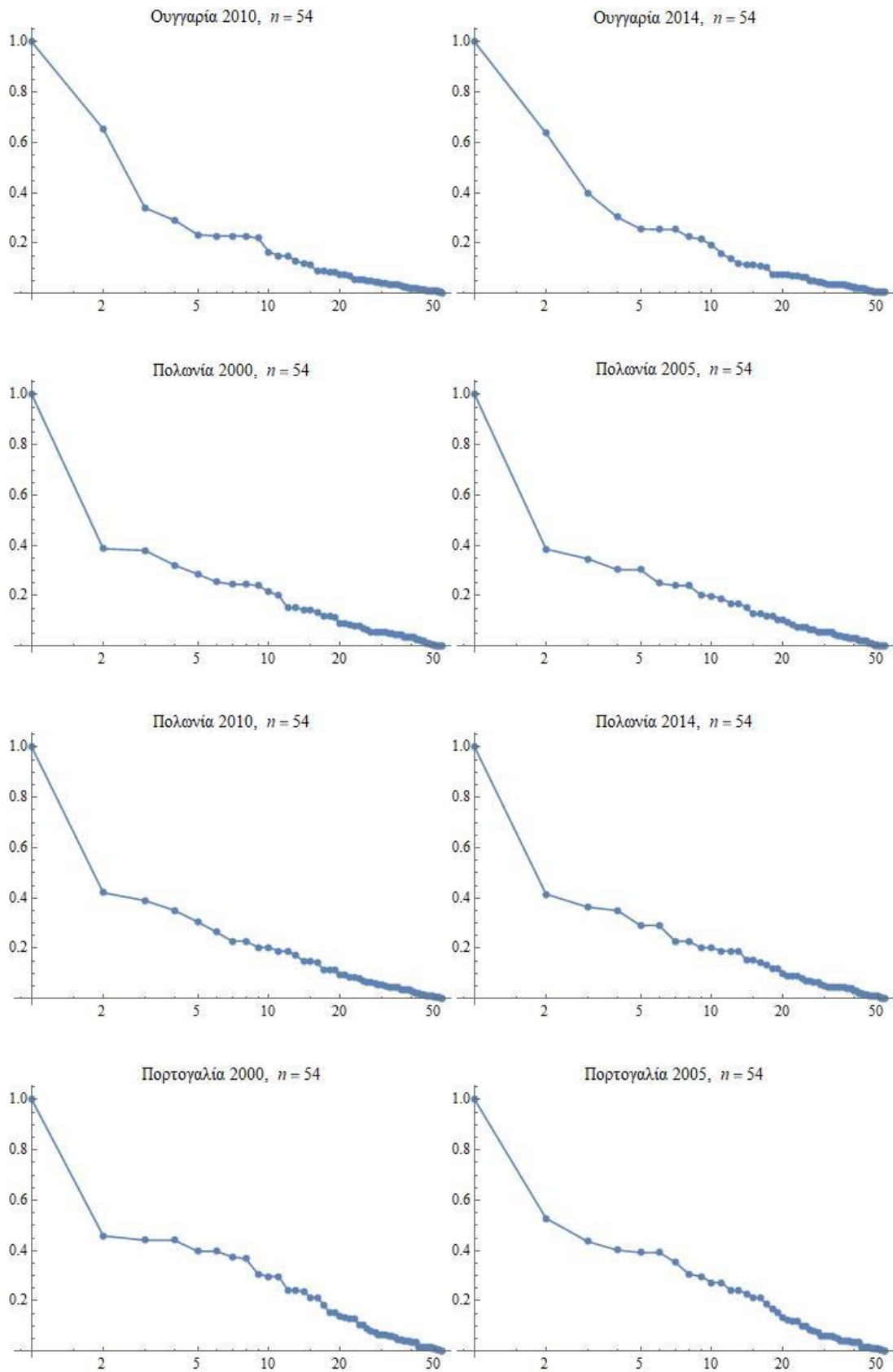


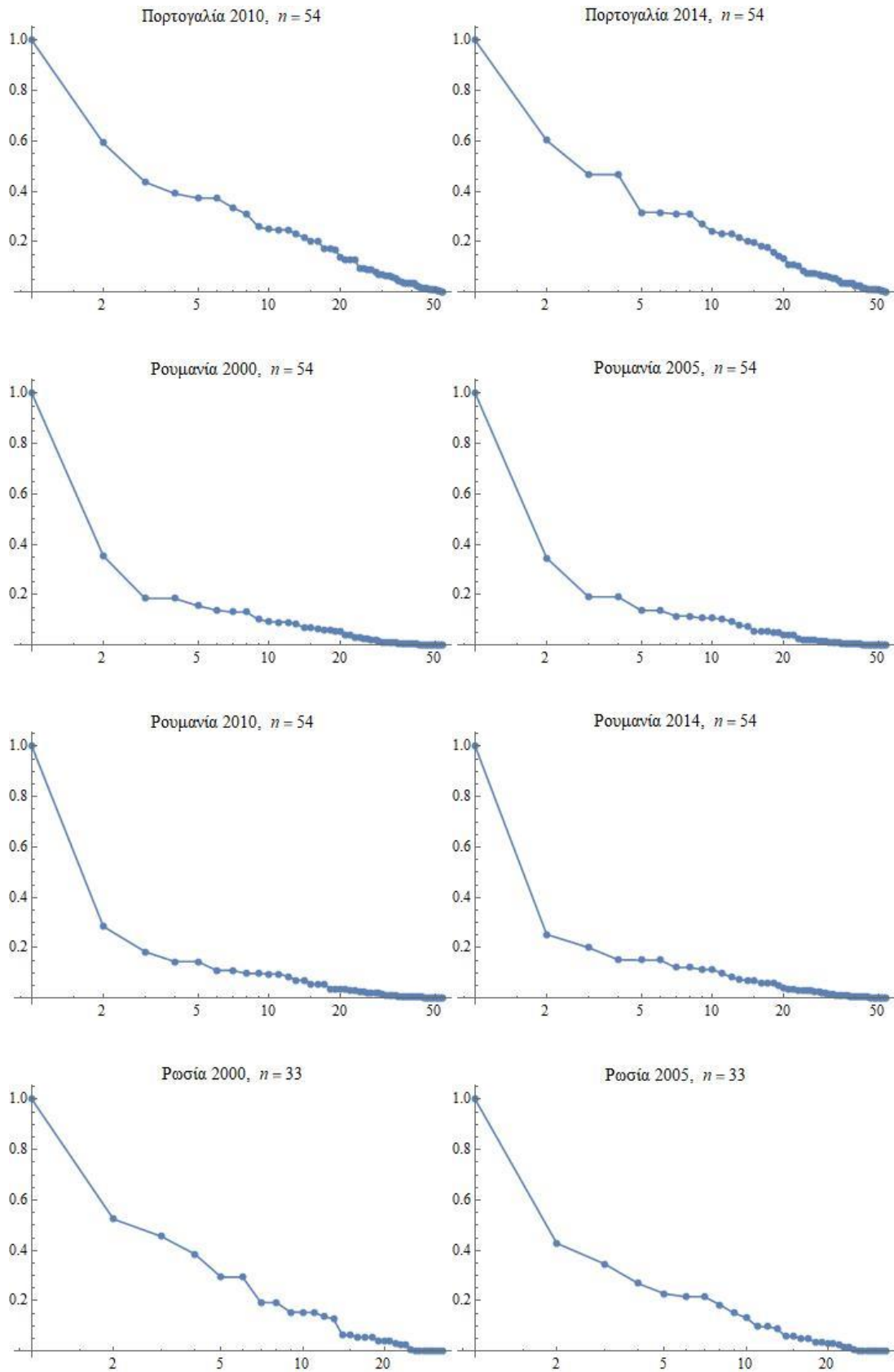


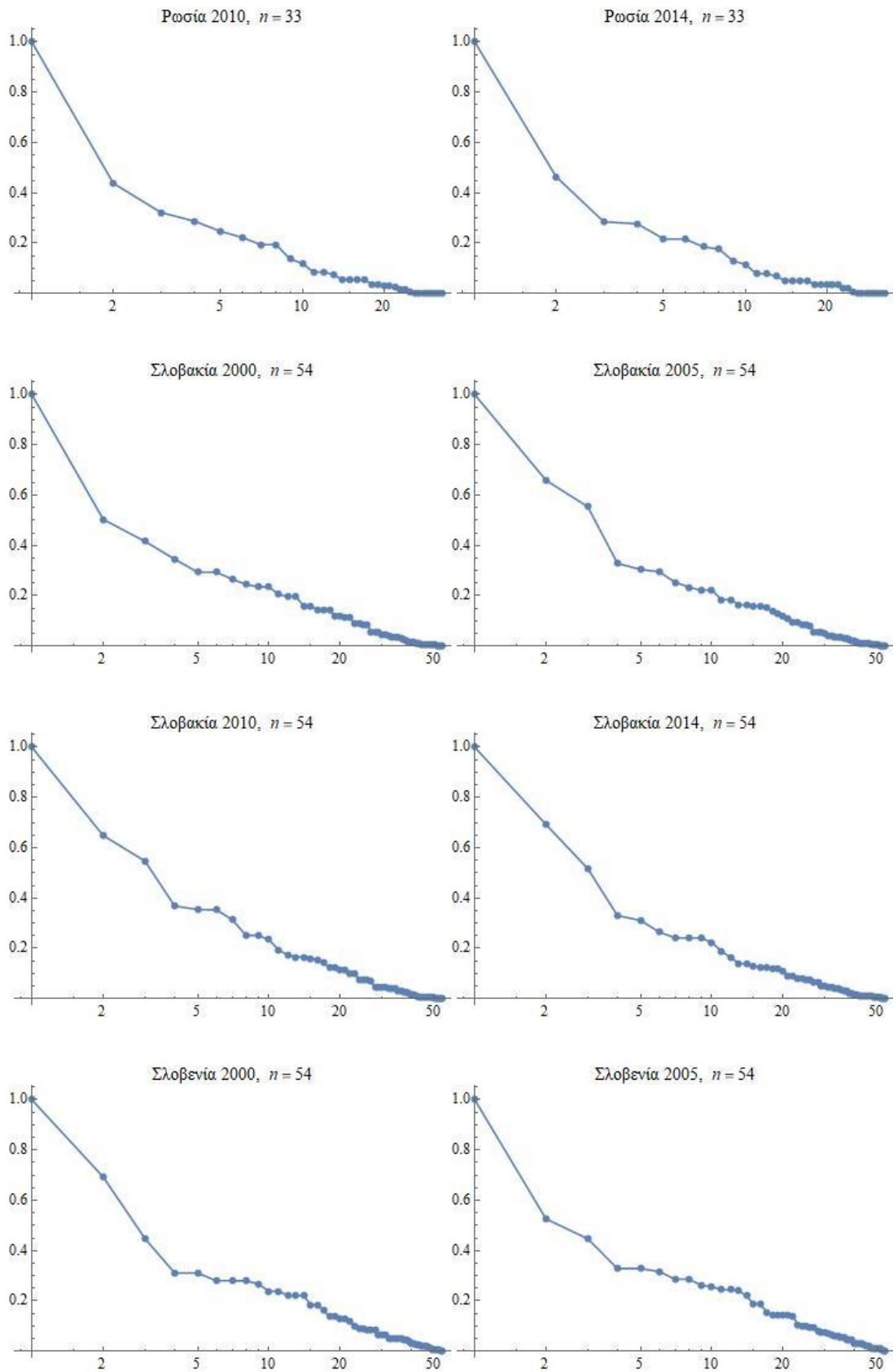


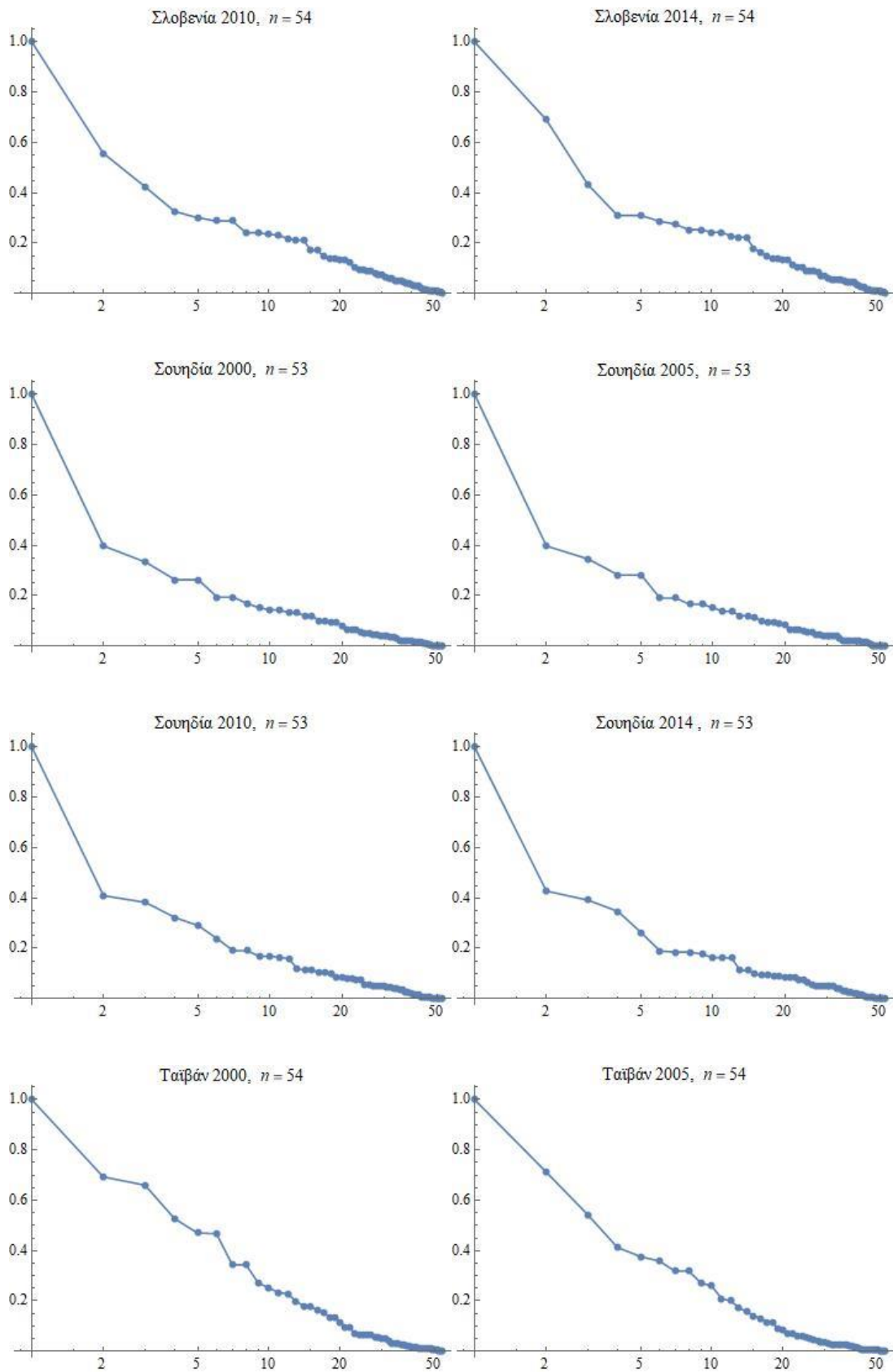


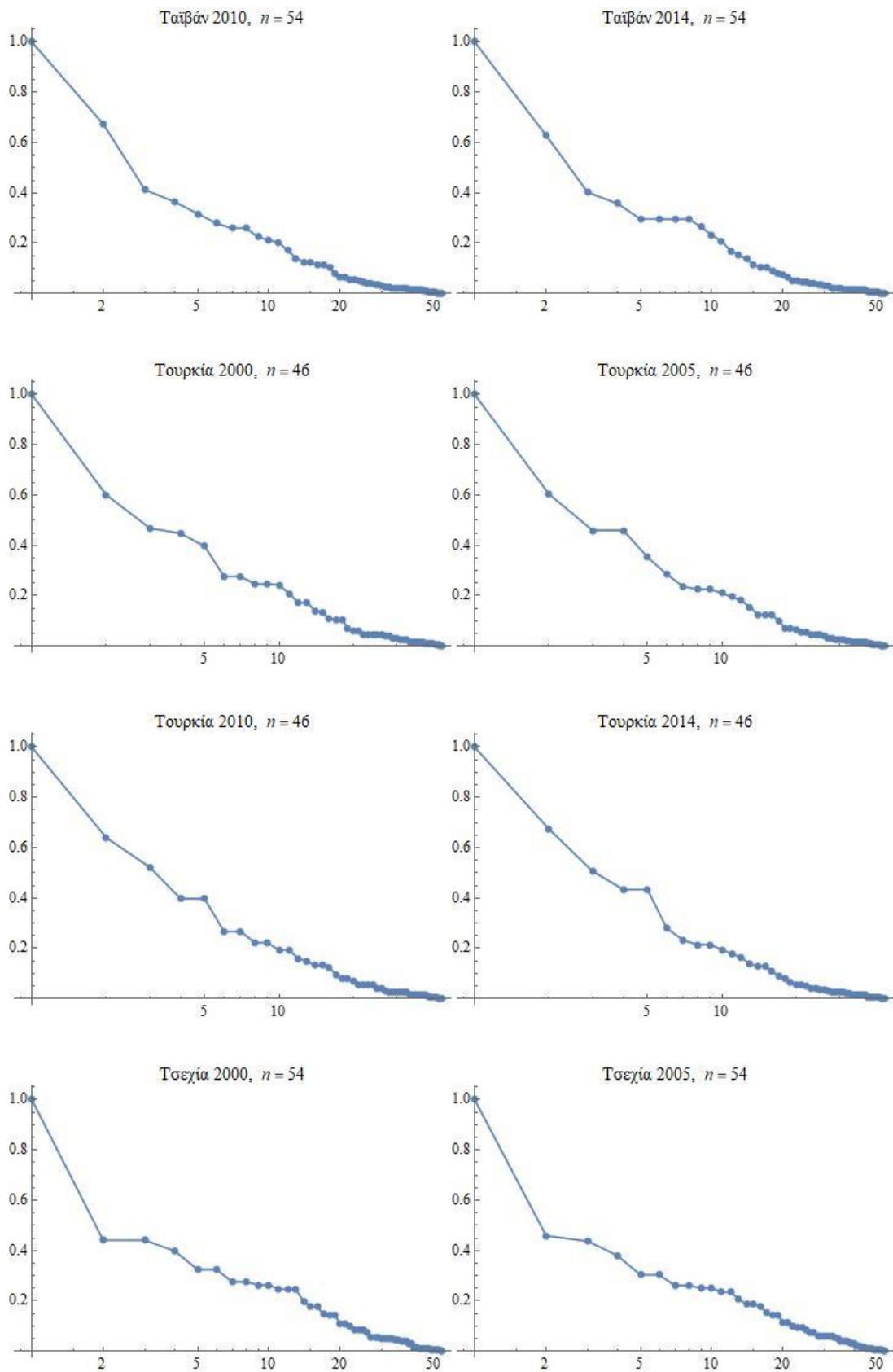


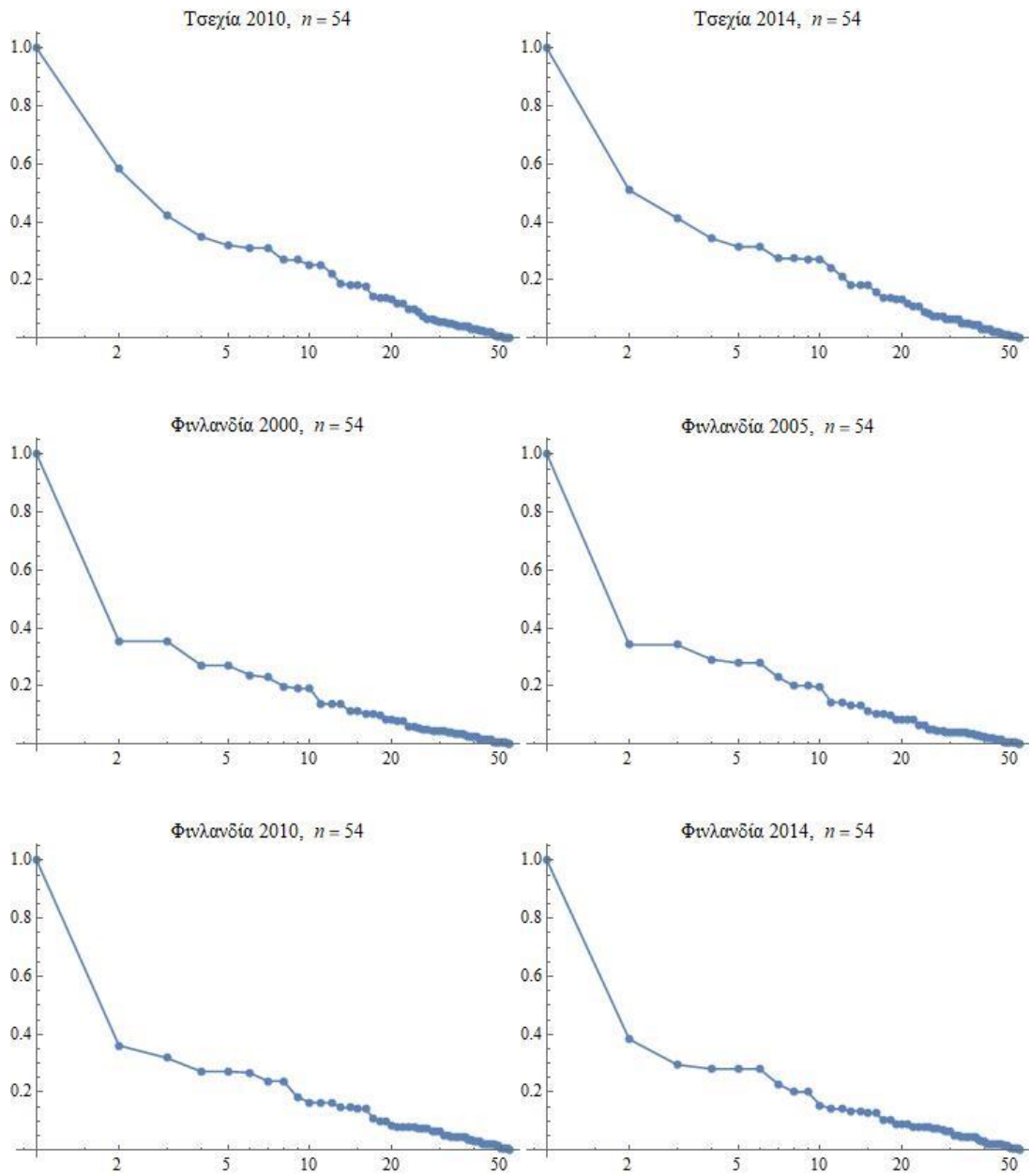












Παράρτημα Γ. Παράθεση Αποτελεσμάτων

Παρακάτω παρατίθενται τα αποτελέσματα των υπολογισμών για τις 43 οικονομίες που εξετάζονται. Συγκεκριμένα δίνονται τα μέτρα της δεύτερης, τρίτης και τελευταίας ιδιοτιμής των μητρών \mathbf{J} , ο γεωμετρικός μέσος του μέτρου των μη-δεσποζουσών ιδιοτιμών των μητρών \mathbf{J} , ο λόγος μεταξύ της μικρότερης προς τη μεγαλύτερη ιδιάζουσα τιμή των μητρών \mathbf{J} , η απόλυτη τιμή της ορίζουσας της μήτρας \mathbf{K} , ο βαθμός κανονικότητας-ελεξιμότητας, και οι αριθμητικές τάξεις της \mathbf{K} , για τις θετικές ανοχές 10^{-4} και 10^{-2} .

Πίνακας 2. Φασματικά χαρακτηριστικά και χαρακτηριστικά κανονικότητας των πραγματικών οικονομιών

		$ \lambda_{J2} $	$ \lambda_{J3} $	$ \lambda_{Jn} $	GM	$\sigma_{Jn}\sigma_{J1}^{-1}$	$ \det[\mathbf{K}] $	DR	$NR, \tau=10^{-4}$	$NR, \tau=10^{-2}$
Αυστραλία	2000 $n=50$	0.36	0.28	2×10^{-4}	0.037	2×10^{-5}	10^{-691}	6×10^{-19}	5	3
	2005 $n=50$	0.36	0.28	3×10^{-4}	0.037	2×10^{-5}	10^{-703}	5×10^{-19}	5	3
	2010 $n=50$	0.33	0.27	6×10^{-4}	0.044	1×10^{-4}	10^{-709}	1×10^{-19}	5	3
	2014 $n=50$	0.36	0.32	3×10^{-4}	0.044	2×10^{-5}	10^{-702}	7×10^{-19}	5	3
Αυστρία	2000 $n=54$	0.67	0.57	5×10^{-4}	0.086	1×10^{-4}	10^{-729}	6×10^{-19}	6	3
	2005 $n=54$	0.71	0.52	1×10^{-4}	0.073	3×10^{-5}	10^{-749}	9×10^{-20}	6	3
	2010 $n=54$	0.63	0.53	0.002	0.075	4×10^{-4}	10^{-749}	7×10^{-19}	6	3
	2014 $n=54$	0.53	0.53	0.002	0.081	6×10^{-4}	10^{-749}	6×10^{-19}	6	3
Βέλγιο	2000 $n=54$	0.46	0.38	1×10^{-5}	0.035	1×10^{-7}	10^{-762}	3×10^{-19}	5	3
	2005 $n=54$	0.5	0.42	1×10^{-5}	0.036	2×10^{-7}	10^{-767}	9×10^{-20}	5	3
	2010 $n=54$	0.45	0.41	1×10^{-5}	0.051	8×10^{-7}	10^{-764}	9×10^{-20}	5	3
	2014 $n=54$	0.44	0.37	5×10^{-5}	0.049	2×10^{-6}	10^{-771}	2×10^{-19}	5	3
Βουλγαρία	2000 $n=54$	0.33	0.31	4×10^{-6}	0.029	1×10^{-6}	10^{-700}	1×10^{-18}	5	3
	2005 $n=54$	0.3	0.26	9×10^{-6}	0.032	3×10^{-6}	10^{-723}	6×10^{-19}	5	3
	2010 $n=54$	0.55	0.29	1×10^{-6}	0.033	3×10^{-7}	10^{-725}	6×10^{-20}	5	3
	2014 $n=54$	0.39	0.33	1×10^{-5}	0.036	2×10^{-6}	10^{-728}	4×10^{-19}	5	3

Βραζιλία	2000 $n = 47$	0.55	0.4	3×10^{-12}	0.023	5×10^{-13}	10^{-587}	7×10^{-20}	6	3
	2005 $n = 47$	0.5	0.37	3×10^{-12}	0.023	8×10^{-13}	10^{-590}	3×10^{-21}	6	3
	2010 $n = 47$	0.46	0.38	1×10^{-11}	0.025	3×10^{-12}	10^{-605}	7×10^{-20}	6	3
	2014 $n = 47$	0.47	0.42	8×10^{-11}	0.037	4×10^{-11}	10^{-606}	4×10^{-19}	6	3
Γαλλία	2000 $n = 54$	0.44	0.44	6×10^{-6}	0.051	1×10^{-6}	10^{-747}	3×10^{-19}	5	3
	2005 $n = 54$	0.41	0.38	6×10^{-6}	0.052	1×10^{-6}	10^{-761}	1×10^{-18}	5	3
	2010 $n = 54$	0.53	0.34	1×10^{-6}	0.051	5×10^{-7}	10^{-760}	3×10^{-19}	5	3
	2014 $n = 54$	0.49	0.36	1×10^{-5}	0.053	4×10^{-6}	10^{-761}	3×10^{-19}	5	3
Γερμανία	2000 $n = 54$	0.5	0.41	0.001	0.071	2×10^{-4}	10^{-731}	4×10^{-19}	5	3
	2005 $n = 54$	0.5	0.4	0.001	0.069	1×10^{-4}	10^{-747}	1×10^{-19}	5	3
	2010 $n = 54$	0.47	0.39	1×10^{-4}	0.066	6×10^{-5}	10^{-751}	4×10^{-19}	5	3
	2014 $n = 54$	0.48	0.4	5×10^{-4}	0.067	4×10^{-5}	10^{-752}	1×10^{-19}	5	3
Δανία	2000 $n = 54$	0.53	0.41	0.001	0.054	2×10^{-4}	10^{-737}	1×10^{-19}	5	3
	2005 $n = 54$	0.54	0.4	0.001	0.052	2×10^{-4}	10^{-755}	9×10^{-19}	5	3
	2010 $n = 54$	0.6	0.47	0.002	0.063	4×10^{-4}	10^{-755}	7×10^{-19}	6	3
	2014 $n = 54$	0.58	0.48	0.003	0.065	4×10^{-4}	10^{-757}	8×10^{-20}	5	3
Ελβετία	2000 $n = 49$	0.9	0.65	3×10^{-12}	0.009	2×10^{-12}	10^{-644}	4×10^{-19}	7	4
	2005 $n = 49$	0.69	0.61	1×10^{-12}	0.007	9×10^{-12}	10^{-673}	7×10^{-20}	6	4
	2010 $n = 49$	0.65	0.57	4×10^{-13}	0.011	2×10^{-13}	10^{-681}	1×10^{-19}	6	4
	2014 $n = 49$	0.65	0.58	3×10^{-12}	0.007	8×10^{-13}	10^{-678}	2×10^{-20}	7	4
Ελλάδα	2000 $n = 54$	0.62	0.35	9×10^{-5}	0.031	2×10^{-7}	10^{-723}	4×10^{-19}	6	3
	2005 $n = 54$	0.57	0.26	2×10^{-6}	0.028	3×10^{-8}	10^{-742}	1×10^{-19}	6	3
	2010 $n = 54$	0.58	0.48	5×10^{-5}	0.03	2×10^{-7}	10^{-739}	3×10^{-19}	6	3
	2014 $n = 54$	0.51	0.35	1×10^{-4}	0.034	3×10^{-7}	10^{-735}	2×10^{-19}	6	3

Εσθονία	2000 $n = 54$	0.4	0.36	0.001	0.053	1×10^{-4}	10^{-706}	6×10^{-20}	5	3
	2005 $n = 54$	0.44	0.44	0.001	0.054	3×10^{-4}	10^{-722}	4×10^{-19}	5	3
	2010 $n = 54$	0.53	0.44	1×10^{-6}	0.051	2×10^{-7}	10^{-727}	3×10^{-19}	6	3
	2014 $n = 54$	0.57	0.47	0.001	0.054	2×10^{-4}	10^{-739}	2×10^{-19}	6	3
Η.Π.Α.	2000 $n = 55$	0.43	0.39	5×10^{-14}	0.003	3×10^{-14}	10^{-767}	2×10^{-19}	5	3
	2005 $n = 55$	0.45	0.45	1×10^{-13}	0.003	5×10^{-14}	10^{-766}	2×10^{-19}	5	3
	2010 $n = 55$	0.55	0.51	1×10^{-13}	0.003	1×10^{-14}	10^{-763}	7×10^{-20}	6	3
	2014 $n = 55$	0.53	0.48	1×10^{-13}	0.003	5×10^{-14}	10^{-770}	6×10^{-19}	6	3
Ηνωμένο Βασίλειο	2000 $n = 54$	0.48	0.44	5×10^{-5}	0.058	4×10^{-7}	10^{-741}	6×10^{-19}	5	3
	2005 $n = 54$	0.45	0.39	1×10^{-4}	0.062	2×10^{-6}	10^{-753}	7×10^{-19}	5	3
	2010 $n = 54$	0.48	0.4	8×10^{-4}	0.067	4×10^{-6}	10^{-755}	1×10^{-18}	6	3
	2014 $n = 54$	0.47	0.39	3×10^{-4}	0.067	6×10^{-6}	10^{-758}	6×10^{-20}	5	3
Ιαπωνία	2000 $n = 51$	0.64	0.55	0.002	0.058	5×10^{-4}	10^{-692}	8×10^{-20}	6	3
	2005 $n = 51$	0.59	0.59	0.002	0.051	3×10^{-4}	10^{-690}	9×10^{-19}	6	3
	2010 $n = 51$	0.54	0.51	0.002	0.044	2×10^{-4}	10^{-704}	1×10^{-19}	6	3
	2014 $n = 51$	0.46	0.46	0.002	0.043	2×10^{-4}	10^{-704}	7×10^{-19}	6	3
Ινδία	2000 $n = 44$	0.54	0.3	1×10^{-5}	0.04	3×10^{-6}	10^{-520}	1×10^{-18}	6	3
	2005 $n = 44$	0.53	0.33	2×10^{-5}	0.04	4×10^{-6}	10^{-527}	5×10^{-19}	6	4
	2010 $n = 44$	0.53	0.34	8×10^{-6}	0.038	1×10^{-6}	10^{-535}	7×10^{-19}	6	4
	2014 $n = 44$	0.54	0.34	7×10^{-6}	0.037	7×10^{-7}	10^{-536}	9×10^{-19}	6	4
Ινδονησία	2000 $n = 47$	0.78	0.56	4×10^{-7}	0.041	9×10^{-8}	10^{-561}	3×10^{-19}	7	4
	2005 $n = 47$	0.59	0.47	7×10^{-8}	0.055	4×10^{-8}	10^{-564}	3×10^{-19}	6	3
	2010 $n = 47$	0.76	0.59	3×10^{-8}	0.042	2×10^{-8}	10^{-588}	1×10^{-19}	7	4
	2014 $n = 47$	0.76	0.59	8×10^{-9}	0.038	4×10^{-9}	10^{-582}	7×10^{-19}	7	4

Ιρλανδία	2000 $n = 54$	0.67	0.48	5×10^{-11}	0.046	3×10^{-11}	10^{-747}	3×10^{-19}	6	3
	2005 $n = 54$	0.52	0.52	6×10^{-11}	0.051	3×10^{-11}	10^{-751}	8×10^{-19}	6	3
	2010 $n = 54$	0.7	0.33	3×10^{-11}	0.006	9×10^{-12}	10^{-774}	9×10^{-19}	5	3
	2014 $n = 54$	0.39	0.19	2×10^{-11}	0.004	9×10^{-12}	10^{-824}	6×10^{-20}	5	4
Ισπανία	2000 $n = 54$	0.38	0.36	1×10^{-5}	0.046	1×10^{-6}	10^{-746}	4×10^{-19}	5	3
	2005 $n = 54$	0.35	0.33	2×10^{-5}	0.044	1×10^{-6}	10^{-762}	4×10^{-19}	5	3
	2010 $n = 54$	0.49	0.3	0.001	0.06	4×10^{-5}	10^{-758}	9×10^{-19}	5	3
	2014 $n = 54$	0.51	0.36	0.001	0.057	3×10^{-5}	10^{-759}	7×10^{-19}	5	3
Ιταλία	2000 $n = 54$	0.47	0.35	1×10^{-4}	0.038	5×10^{-6}	10^{-757}	4×10^{-19}	5	3
	2005 $n = 54$	0.46	0.32	1×10^{-4}	0.038	4×10^{-6}	10^{-770}	6×10^{-19}	5	3
	2010 $n = 54$	0.41	0.37	4×10^{-4}	0.035	8×10^{-5}	10^{-769}	2×10^{-19}	5	3
	2014 $n = 54$	0.43	0.36	3×10^{-5}	0.035	1×10^{-6}	10^{-769}	4×10^{-19}	5	3
Καναδάς	2000 $n = 51$	0.5	0.42	1×10^{-6}	0.048	1×10^{-7}	10^{-690}	2×10^{-19}	5	2
	2005 $n = 51$	0.5	0.44	6×10^{-6}	0.049	5×10^{-7}	10^{-694}	1×10^{-20}	5	3
	2010 $n = 51$	0.57	0.46	6×10^{-5}	0.05	3×10^{-6}	10^{-699}	2×10^{-19}	6	3
	2014 $n = 51$	0.52	0.43	6×10^{-5}	0.05	3×10^{-6}	10^{-702}	1×10^{-19}	6	3
Κάτω Χώρες	2000 $n = 54$	0.42	0.37	0.003	0.06	6×10^{-5}	10^{-746}	1×10^{-19}	5	3
	2005 $n = 54$	0.37	0.35	0.001	0.063	6×10^{-5}	10^{-761}	8×10^{-19}	5	3
	2010 $n = 54$	0.5	0.4	0.001	0.069	7×10^{-5}	10^{-753}	4×10^{-19}	6	3
	2014 $n = 54$	0.53	0.52	2×10^{-4}	0.054	1×10^{-4}	10^{-759}	5×10^{-20}	5	3
Κίνα	2000 $n = 47$	0.34	0.32	5×10^{-6}	0.026	3×10^{-7}	10^{-572}	7×10^{-19}	5	3
	2005 $n = 47$	0.38	0.3	4×10^{-4}	0.029	2×10^{-5}	10^{-582}	1×10^{-18}	5	3
	2010 $n = 47$	0.42	0.34	0.002	0.037	3×10^{-4}	10^{-593}	5×10^{-19}	5	3
	2014 $n = 47$	0.42	0.36	3×10^{-4}	0.038	2×10^{-5}	10^{-603}	6×10^{-19}	5	3

Κορέα	2000 $n = 53$	0.67	0.54	0.002	0.065	3×10^{-4}	10^{-708}	6×10^{-19}	6	3
	2005 $n = 53$	0.62	0.48	1×10^{-6}	0.053	5×10^{-8}	10^{-716}	4×10^{-19}	6	3
	2010 $n = 53$	0.41	0.34	0.001	0.036	7×10^{-5}	10^{-731}	9×10^{-19}	5	3
	2014 $n = 53$	0.41	0.33	0.002	0.036	2×10^{-4}	10^{-737}	5×10^{-19}	5	3
Κροατία	2000 $n = 55$	0.54	0.38	0.001	0.056	1×10^{-4}	10^{-706}	2×10^{-19}	6	3
	2005 $n = 55$	0.55	0.32	0.001	0.05	1×10^{-4}	10^{-737}	4×10^{-19}	6	3
	2010 $n = 55$	0.55	0.33	8×10^{-4}	0.05	6×10^{-5}	10^{-750}	6×10^{-20}	6	3
	2014 $n = 55$	0.55	0.34	9×10^{-4}	0.05	7×10^{-5}	10^{-747}	2×10^{-19}	6	3
Κύπρος	2000 $n = 54$	0.51	0.32	1×10^{-5}	0.028	7×10^{-7}	10^{-757}	3×10^{-19}	6	4
	2005 $n = 53$	0.59	0.53	4×10^{-5}	0.057	1×10^{-5}	10^{-694}	1×10^{-19}	6	3
	2010 $n = 53$	0.55	0.48	2×10^{-4}	0.058	2×10^{-5}	10^{-701}	5×10^{-19}	6	3
	2014 $n = 54$	0.6	0.41	1×10^{-4}	0.04	3×10^{-6}	10^{-735}	6×10^{-19}	6	3
Λετονία	2000 $n = 54$	0.4	0.3	1×10^{-5}	0.036	1×10^{-6}	10^{-724}	2×10^{-19}	5	3
	2005 $n = 54$	0.49	0.39	1×10^{-5}	0.046	1×10^{-6}	10^{-716}	7×10^{-19}	6	3
	2010 $n = 54$	0.51	0.36	1×10^{-5}	0.043	2×10^{-6}	10^{-732}	2×10^{-19}	5	2
	2014 $n = 54$	0.48	0.36	1×10^{-5}	0.039	1×10^{-6}	10^{-741}	2×10^{-19}	5	3
Λιθουανία	2000 $n = 54$	0.55	0.55	0.001	0.064	1×10^{-4}	10^{-684}	2×10^{-20}	6	3
	2005 $n = 54$	0.46	0.46	4×10^{-4}	0.067	3×10^{-5}	10^{-709}	4×10^{-19}	6	3
	2010 $n = 54$	0.53	0.38	8×10^{-4}	0.065	8×10^{-5}	10^{-718}	6×10^{-19}	6	3
	2014 $n = 54$	0.5	0.35	6×10^{-4}	0.063	6×10^{-5}	10^{-727}	2×10^{-19}	6	3
Λουξεμβούργο	2000 $n = 52$	0.49	0.42	1×10^{-6}	0.015	2×10^{-8}	10^{-754}	5×10^{-20}	6	4
	2005 $n = 52$	0.4	0.3	9×10^{-6}	0.014	1×10^{-7}	10^{-788}	2×10^{-19}	5	4
	2010 $n = 52$	0.4	0.25	8×10^{-7}	0.012	2×10^{-7}	10^{-787}	8×10^{-20}	5	3
	2014 $n = 52$	0.4	0.25	3×10^{-7}	0.009	2×10^{-9}	10^{-788}	3×10^{-19}	5	3

Μάλτα	2000 <i>n</i> = 51	0.66	0.52	0.001	0.024	2×10^{-4}	10^{-706}	3×10^{-20}	5	3
	2005 <i>n</i> = 53	0.64	0.44	1×10^{-4}	0.023	2×10^{-5}	10^{-744}	5×10^{-19}	6	3
	2010 <i>n</i> = 54	0.52	0.47	6×10^{-5}	0.026	6×10^{-6}	10^{-761}	7×10^{-19}	5	3
	2014 <i>n</i> = 54	0.6	0.4	3×10^{-4}	0.026	2×10^{-5}	10^{-755}	5×10^{-20}	6	3
Μεξικό	2000 <i>n</i> = 52	0.65	0.44	1×10^{-6}	0.026	2×10^{-7}	10^{-701}	2×10^{-19}	6	4
	2005 <i>n</i> = 52	0.66	0.41	5×10^{-6}	0.027	8×10^{-7}	10^{-713}	2×10^{-19}	6	4
	2010 <i>n</i> = 52	0.66	0.41	6×10^{-6}	0.026	8×10^{-7}	10^{-717}	2×10^{-19}	6	4
	2014 <i>n</i> = 52	0.7	0.43	5×10^{-6}	0.028	6×10^{-7}	10^{-709}	4×10^{-19}	6	4
Νορβηγία	2000 <i>n</i> = 54	0.54	0.42	1×10^{-9}	0.021	1×10^{-11}	10^{-743}	5×10^{-19}	5	3
	2005 <i>n</i> = 54	0.73	0.49	1×10^{-10}	0.021	1×10^{-12}	10^{-753}	3×10^{-19}	6	3
	2010 <i>n</i> = 54	0.55	0.46	1×10^{-9}	0.025	5×10^{-10}	10^{-764}	5×10^{-19}	6	3
	2014 <i>n</i> = 54	0.44	0.44	4×10^{-9}	0.021	6×10^{-12}	10^{-772}	1×10^{-18}	5	2
Ουγγαρία	2000 <i>n</i> = 54	0.5	0.38	3×10^{-5}	0.033	2×10^{-6}	10^{-719}	7×10^{-19}	6	3
	2005 <i>n</i> = 54	0.53	0.36	2×10^{-4}	0.042	1×10^{-5}	10^{-732}	2×10^{-19}	6	3
	2010 <i>n</i> = 54	0.65	0.34	2×10^{-4}	0.045	4×10^{-5}	10^{-738}	2×10^{-19}	6	3
	2014 <i>n</i> = 54	0.64	0.4	0.004	0.047	1×10^{-4}	10^{-736}	5×10^{-19}	6	3
Πολωνία	2000 <i>n</i> = 54	0.39	0.38	3×10^{-11}	0.023	2×10^{-11}	10^{-722}	6×10^{-19}	5	2
	2005 <i>n</i> = 54	0.39	0.35	1×10^{-11}	0.021	1×10^{-11}	10^{-738}	1×10^{-18}	5	2
	2010 <i>n</i> = 54	0.42	0.39	4×10^{-5}	0.049	9×10^{-7}	10^{-740}	7×10^{-19}	5	3
	2014 <i>n</i> = 54	0.42	0.36	4×10^{-4}	0.052	1×10^{-5}	10^{-742}	3×10^{-19}	5	3
Πορτογαλία	2000 <i>n</i> = 54	0.46	0.44	0.002	0.069	2×10^{-4}	10^{-722}	7×10^{-19}	6	3
	2005 <i>n</i> = 54	0.53	0.44	0.001	0.065	2×10^{-4}	10^{-734}	1×10^{-18}	6	3
	2010 <i>n</i> = 54	0.59	0.44	0.002	0.066	2×10^{-4}	10^{-737}	6×10^{-19}	6	3
	2014 <i>n</i> = 54	0.6	0.47	0.001	0.06	9×10^{-5}	10^{-742}	4×10^{-19}	6	3

Ρουμανία	2000 $n = 54$	0.35	0.19	2×10^{-5}	0.014	8×10^{-7}	10^{-713}	6×10^{-19}	5	2
	2005 $n = 54$	0.35	0.19	2×10^{-5}	0.014	1×10^{-6}	10^{-738}	2×10^{-19}	4	2
	2010 $n = 54$	0.28	0.18	7×10^{-6}	0.012	4×10^{-7}	10^{-760}	2×10^{-19}	4	2
	2014 $n = 54$	0.25	0.2	4×10^{-5}	0.017	3×10^{-6}	10^{-756}	4×10^{-19}	4	2
Ρωσία	2000 $n = 33$	0.52	0.46	1×10^{-12}	5×10^{-4}	3×10^{-13}	10^{-354}	6×10^{-19}	6	3
	2005 $n = 33$	0.43	0.35	4×10^{-12}	4×10^{-4}	5×10^{-13}	10^{-384}	9×10^{-19}	6	3
	2010 $n = 33$	0.44	0.32	3×10^{-13}	4×10^{-4}	1×10^{-13}	10^{-395}	1×10^{-18}	5	3
	2014 $n = 33$	0.46	0.29	1×10^{-12}	3×10^{-4}	5×10^{-14}	10^{-400}	4×10^{-19}	5	3
Σλοβακία	2000 $n = 54$	0.5	0.42	1×10^{-6}	0.037	2×10^{-7}	10^{-709}	1×10^{-19}	5	3
	2005 $n = 54$	0.66	0.55	1×10^{-5}	0.04	2×10^{-6}	10^{-726}	6×10^{-21}	6	3
	2010 $n = 54$	0.65	0.55	4×10^{-6}	0.038	6×10^{-7}	10^{-738}	7×10^{-20}	6	3
	2014 $n = 54$	0.69	0.52	3×10^{-6}	0.04	8×10^{-7}	10^{-743}	2×10^{-19}	6	4
Σλοβενία	2000 $n = 54$	0.69	0.45	8×10^{-6}	0.059	2×10^{-6}	10^{-724}	6×10^{-19}	5	3
	2005 $n = 54$	0.53	0.45	4×10^{-6}	0.062	9×10^{-7}	10^{-739}	8×10^{-21}	5	3
	2010 $n = 54$	0.56	0.42	2×10^{-6}	0.057	4×10^{-7}	10^{-745}	1×10^{-20}	5	3
	2014 $n = 54$	0.69	0.43	1×10^{-6}	0.059	3×10^{-7}	10^{-744}	1×10^{-18}	5	3
Σουηδία	2000 $n = 53$	0.4	0.33	4×10^{-11}	0.013	3×10^{-11}	10^{-743}	3×10^{-19}	5	2
	2005 $n = 53$	0.4	0.35	9×10^{-12}	0.013	6×10^{-12}	10^{-751}	3×10^{-19}	5	2
	2010 $n = 53$	0.41	0.38	7×10^{-9}	0.017	3×10^{-10}	10^{-749}	2×10^{-19}	5	2
	2014 $n = 53$	0.43	0.39	2×10^{-9}	0.017	8×10^{-11}	10^{-746}	5×10^{-20}	5	3
Ταϊβάν	2000 $n = 54$	0.69	0.66	0.003	0.051	2×10^{-4}	10^{-719}	3×10^{-19}	6	3
	2005 $n = 54$	0.71	0.54	0.001	0.04	1×10^{-4}	10^{-734}	7×10^{-19}	6	4
	2010 $n = 54$	0.67	0.41	1×10^{-4}	0.035	1×10^{-5}	10^{-752}	9×10^{-19}	6	3
	2014 $n = 54$	0.63	0.4	3×10^{-5}	0.031	7×10^{-7}	10^{-753}	8×10^{-19}	6	3

Τουρκία	2000 <i>n</i> = 46	0.6	0.47	2×10^{-4}	0.045	3×10^{-6}	10^{-593}	4×10^{-19}	6	3
	2005 <i>n</i> = 46	0.6	0.46	3×10^{-4}	0.044	4×10^{-6}	10^{-601}	2×10^{-19}	6	3
	2010 <i>n</i> = 46	0.64	0.52	4×10^{-4}	0.044	6×10^{-6}	10^{-608}	2×10^{-19}	6	3
	2014 <i>n</i> = 46	0.67	0.51	4×10^{-4}	0.04	7×10^{-6}	10^{-602}	7×10^{-19}	6	3
Τσεχία	2000 <i>n</i> = 54	0.44	0.44	0.003	0.055	1×10^{-4}	10^{-710}	3×10^{-19}	5	2
	2005 <i>n</i> = 54	0.46	0.44	0.002	0.056	1×10^{-4}	10^{-730}	3×10^{-19}	5	3
	2010 <i>n</i> = 54	0.58	0.42	7×10^{-5}	0.055	5×10^{-6}	10^{-740}	7×10^{-19}	5	3
	2014 <i>n</i> = 54	0.51	0.41	0.001	0.059	7×10^{-5}	10^{-741}	5×10^{-20}	5	3
Φινλανδία	2000 <i>n</i> = 54	0.35	0.35	0.003	0.044	1×10^{-4}	10^{-757}	4×10^{-20}	5	2
	2005 <i>n</i> = 54	0.34	0.34	0.003	0.046	2×10^{-4}	10^{-766}	1×10^{-19}	5	2
	2010 <i>n</i> = 54	0.36	0.32	6×10^{-4}	0.055	2×10^{-4}	10^{-770}	7×10^{-19}	5	2
	2014 <i>n</i> = 54	0.38	0.29	1×10^{-4}	0.052	3×10^{-5}	10^{-771}	4×10^{-19}	5	2
Σημείωση: 43 οικονομίες – 172 SIOTs										