



**ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : ΘΕΟΔΩΡΟΣ ΜΑΡΙΟΛΗΣ
ΑΝ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ**

**ΤΙΜΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΕΙΣΟΔΗΜΑΤΟΣ:
Η ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ BIENENFELD ΚΑΙ Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΩΝ
ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΤΗΣ ΜΗΤΡΑΣ ΤΩΝ ΚΑΘΕΤΩΣ
ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΩΝ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ**

ΦΩΤΟΥΛΑ ΗΛΙΑΔΗ

ΑΘΗΝΑ 2010

Ευχαριστίες

Τις εγκάρδιες ευχαριστίες μου θα ήθελα να εκφράσω σε όλους όσους συνέβαλλαν στην συγγραφή της παρούσας μελέτης. Με ιδιαίτερη χαρά θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Αναπληρωτή καθηγητή του τμήματος Δημόσιας Διοίκησης του Παντείου Πανεπιστημίου κ. Θεόδωρο Μαριόλη τόσο για την άψογη συνεργασία που είχαμε κατά την διάρκεια φοίτησης μου στο πρόγραμμα όσο και για την πολύτιμη βοήθεια του κατά την περίοδο εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας. Οι επικοινωνιακές συζητήσεις και οι διευκρινήσεις του σε κάθε είδους απορία μου έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην διαμόρφωση της παρούσης. Η εμπιστοσύνη που έδειξε στο πρόσωπο μου αποτελεί για μένα μεγάλη τιμή και οι γνώσεις που αποκόμισα θα αποτελέσουν σημαντικό εφόδιο για την μετέπειτα πορεία μου.

Τις ευχαριστίες μου θα ήθελα να εκφράσω και στον υποψήφιο διδάκτορα Γεώργιο Σώκλη. Αρχικά, για την παραχώρηση των εμπειρικών στοιχείων της εφαρμογής και έπειτα, για την κάθε είδους βοήθεια που μου προσέφερε στις ωφέλιμες και δημιουργικές μας συναντήσεις. Οι παρατηρήσεις και τα σχόλια του είχαν καίρια σημασία για την εξέλιξη της μελέτης μου. Του εύχομαι ολόψυχα κάθε επιτυχία.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένεια μου και κυρίως στους γονείς μου για την στήριξη τους σε όλη την διάρκεια σπουδών μου σε προπτυχιακό και μεταπτυχιακό επίπεδο.

Περίληψη

Η παρούσα εργασία ασχολείται με την προσέγγιση Bienefeld, για τις τιμές παραγωγής, και την ακρίβειά της, η οποία, με την σειρά της, σχετίζεται με την κατανομή των ιδιοτιμών της μήτρας των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι, αρχικά, να εξετάσει κατά πόσο η δευτεροβάθμια προσέγγιση Bienefeld, με βάση την ισχύουσα κατανομή του εισοδήματος, προσεγγίζει ικανοποιητικά το διάλυμα των τιμών παραγωγής και έπειτα, να ελέγξει την ύπαρξη ή μη συσχετίσεων ανάμεσα σε μεγέθη, των οποίων η τιμή εξαρτάται από την κατανομή των ιδιοτιμών (όπως π.χ. η τυπική απόκλιση των ιδιοτιμών, ο γεωμετρικός μέσος των ιδιοτιμών κ.α.) και στα μεγέθη που προσδιορίζουν την ακρίβεια της προσέγγισης.

Το θεωρητικό πλαίσιο, στη βάση του οποίου πραγματοποιήθηκε η μελέτη, αναπτύσσεται στο κυρίως κείμενο και εφαρμόζεται με δεδομένα που λάβαμε από δέκα πίνακες εισροών – εκροών. Τα αποτελέσματα της εφαρμογής δείχνουν ότι, στο μεγαλύτερο μέρος του δείγματος η δευτεροβάθμια προσέγγιση Bienefeld, με βάση την ισχύουσα κατανομή εισοδήματος, προσεγγίζει αρκετά ικανοποιητικά το διάλυμα των τιμών παραγωγής. Οφείλουμε, όμως, να επισημάνουμε ότι, παρουσιάζονται και εξαιρέσεις. Παρόλα αυτά, ορισμένα από τα αποτελέσματα που προέκυψαν αποδεικνύουν ότι, η προσέγγιση δύναται να είναι ακριβής μέσω ενός πολυωνύμου χαμηλής τάξης. Τέλος, οι συσχετίσεις που πραγματοποιηθήκαν δείχνουν πως, με ορισμένο δείγμα παρατηρήσεων, σε ορισμένες περιπτώσεις παρουσιάζεται ισχυρή συσχέτιση και η μορφή της συσχέτισης είναι και η αναμενόμενη θεωρητικά

Περιεχόμενα

	Σελ.
Εισαγωγή.....	5
 Κεφάλαιο 1^ο : Το Θεωρητικό Πλαίσιο	
Εισαγωγή.....	8
1.1 Η Πολυωνυμική Προσέγγιση Bienefeld και η Συσχέτισή της με την Κατανομή των Ιδιοτιμών.....	8
Συμπεράσματα.....	14
 Κεφάλαιο 2^ο : Εμπειρική Ανάλυση	
Εισαγωγή.....	16
2.1 Ανάλυση Εμπειρικών Δεδομένων.....	16
2.1.1 Εξαγωγή της Μήτρας Τεχνικών Συντελεστών.....	18
2.1.2 Εξαγωγή του Διανύσματος της Άμεσης, Ομοιογενούς Εργασίας.....	22
2.1.3 Εξαγωγή του Διανύσματος του Πραγματικού Ωρομισθίου.....	23
2.2 Υπολογισμός των Υπολοίπων Απαιτούμενων Μεγεθών.....	25
2.3 Παράθεση Πινάκων με τα Συνολικά Αποτελέσματα.....	29
2.4 Σχολιασμός και Ερμηνεία Αποτελεσμάτων σε σχέση με την Προσέγγιση Bienefeld και την Ακρίβεια της.....	40
2.5 Οι Συσχετίσεις που πραγματοποιήθηκαν και ο Σχολιασμός των Αποτελεσμάτων τους.....	46
 Συμπερασματικές Παρατηρήσεις.....	 56
 Αναφορές.....	 59
 Παράρτημα Α.....	 62
 Παράρτημα Β.....	 88

Εισαγωγή

*“ Τρώγε την πρόοδο
και με τα φλούδια
και με τα κουκούτσια της”*

Ο. Ελύτης, Σηματολόγιον

Στα πλαίσια εμπειρικών εργασιών, πάνω στη σχέση τιμών παραγωγής-κατανομής εισοδήματος, παρατηρήθηκαν δυο πολύ σημαντικά και αλληλένδετα μεταξύ τους ευρήματα:

1. Οι τιμές παραγωγής αποτελούν, κατά κανόνα, μονότονες συναρτήσεις του ποσοστού κέρδους. Αλλά ακόμα και εκείνες οι τιμές παραγωγής, που δεν είναι μονότονες συναρτήσεις του ποσοστού κέρδους, εμφανίζουν μόνο ένα σημείο αλλαγής μονοτονίας
2. Οι τιμές παραγωγής, ως συναρτήσεις του ποσοστού κέρδους, προσεγγίζονται αρκετά ικανοποιητικά από τη γραμμική ή δευτεροβάθμια προσέγγιση του Bienenfeld (1988).

Πρόσφατα, οι Mariolis and Tsoulfidis (2008) ισχυρίστηκαν, τόσο θεωρητικά όσο και εμπειρικά, χρησιμοποιώντας στοιχεία από τον πίνακα εισροών - εκροών της Κινεζικής Οικονομίας για το έτος 1997, πως η παραπάνω συμπεριφορά των τιμών παραγωγής, που αντιστοιχούν σε πραγματικές οικονομίες, μπορεί να αναχθεί στην κατανομή των ιδιοτιμών της μήτρας των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών.

Στην παρούσα εργασία, βασιζόμενοι στο θεωρητικό πλαίσιο που παρουσίασαν οι Mariolis and Tsoulfidis (2008), θα προσπαθήσουμε, χρησιμοποιώντας στοιχεία από δέκα πίνακες εισροών – εκροών και πραγματοποιώντας τους κατάλληλους υπολογισμούς, να εξετάσουμε τα εξής: α) κατά πόσο οι τιμές παραγωγής, ως συναρτήσεις του ποσοστού κέρδους, προσεγγίζονται ικανοποιητικά από την δευτεροβάθμια προσέγγιση του Bienenfeld με βάση την τιμή του ισχύοντος σχετικού ποσοστού κέρδους και αν η προσέγγιση του Bienenfeld δύναται να είναι ικανοποιητική μέσω ενός πολυωνύμου χαμηλής τάξης και β) αν παρατηρείται η ύπαρξη ή μη άμεσων ποσοτικών συσχετίσεων ανάμεσα σε ορισμένα μεγέθη, των

οποίων η τιμή εξαρτάται από την κατανομή των ιδιοτιμών (π.χ. η τυπική απόκλιση των ιδιοτιμών, ο γεωμετρικός μέσος των ιδιοτιμών, η σχετική εντροπία των ιδιοτιμών, κ.α.), και στα μεγέθη τα οποία προσδιορίζουν την ακρίβεια της προσέγγισης Bienenfeld.

Η εργασία αποτελείται από δύο κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο στηριχθήκαμε για την μελέτη. Αναπτύσσεται η πολυωνυμική προσέγγιση του Bienenfeld και εν συνεχεία η ακρίβεια της προσέγγισης αυτής σχετίζεται με την κατανομή των ιδιοτιμών. Στο τέλος του πρώτου κεφαλαίου συνοψίζονται τα συμπεράσματα της θεωρητικής ανάλυσης.

Στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας ακολουθεί η εμπειρική ανάλυση. Πιο συγκεκριμένα, στα τέσσερα πρώτα υποκεφάλαια παρουσιάζονται τα εμπειρικά δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για τους υπόλοιπους υπολογισμούς και ο τρόπος με τον οποίο αυτά εξάγονται από τους πίνακες εισροών – εκροών. Στο πέμπτο υποκεφάλαιο περιγράφονται αναλυτικά οι λοιποί υπολογισμοί που απαιτήθηκαν. Έπειτα, παραθέτουμε τα αποτελέσματα των μετρήσεων μας και ακολουθεί η αξιολόγηση και ο σχολιασμός αυτών. Το δεύτερο κεφάλαιο κλείνει με την σύνοψη των τελικών συμπερασμάτων της μελέτης.

Στο παράρτημα, στο τέλος της εργασίας, εκτίθενται διαγράμματα σχετικά με τις συσχετίσεις καθώς και κάποια από τα συναφή αριθμητικά αποτελέσματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο
ΤΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Εισαγωγή

Στο παρόν μέρος της εργασίας παρουσιάζεται το θεωρητικό πλαίσιο στη βάση του οποίου πραγματοποιήθηκε η μελέτη. Αρχικά, αναλύεται θεωρητικά ο τρόπος με τον οποίο εξάγεται η πολυωνυμική προσέγγιση Bienenfeld και προσδιορίζεται τόσο η γραμμική όσο και η δευτεροβάθμια μορφή της, με βάση τις οποίες το διάνυσμα των τιμών παραγωγής δύναται να προσεγγισθεί ικανοποιητικά. Έπειτα, η ακρίβεια της προσέγγισης αυτής σχετίζεται με την κατανομή των ιδιοτιμών, πράγμα που σημαίνει πως ο βαθμός σύγκλισης της προσέγγισης προς το πραγματικό διάνυσμα των τιμών παραγωγής ανάγεται στην κατανομή των ιδιοτιμών της μήτρας των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών.

1.1 Η Πολυωνυμική Προσέγγιση Bienenfeld και η Συσχέτισή της με την Κατανομή των Ιδιοτιμών

Υποθέτουμε πως οι μισθοί καταβάλλονται εξολοκλήρου στην αρχή της ενιαίας περιόδου παραγωγής και θεωρούμε το σύνηθες σύστημα προσδιορισμού των τιμών παραγωγής (Sraffa, 1960, Part I)¹. Έτσι έχουμε:

$$\mathbf{p}^T = (1+r)(\mathbf{p}^T \mathbf{A} + w\mathbf{I}^T) \quad (1)$$

όπου \mathbf{p} (>0) είναι το διάνυσμα των τιμών παραγωγής των εμπορευμάτων, r το ενιαίο ποσοστό κέρδους, \mathbf{A} η μη διασπώμενη (*irreducible*) μήτρα των τεχνικών συντελεστών, w το χρηματικό ωρομίσθιο και \mathbf{I} (>0) το διάνυσμα των εισροών σε άμεση, ομοιογενή εργασία ανά μονάδα παραγόμενου εμπορεύματος².

Πριν συνεχίσουμε σημειώνουμε ότι, σύμφωνα με το “Πρότυπο Εμπόρευμα” (*Standard commodity*) του Sraffa (1960, chs 4-5), το διάνυσμα των τιμών τυποποιείται ως εξής:

$$\mathbf{p}^T [\mathbf{I} - \mathbf{A}] \mathbf{q}^* = 1, \quad \mathbf{I}^T \mathbf{q}^* = 1 \quad (2)$$

ή, ισοδυνάμως,

$$\mathbf{p}^T \mathbf{q}^* = \mathbf{v}^T \mathbf{q}^* = (1 - \lambda^*)^{-1} = (1 + R)R^{-1} \quad (2a)$$

¹ Το παρόν κεφάλαιο έχει βασισθεί πλήρως στο Μαριόλης (2008).

² Η υπόθεση ότι η \mathbf{A} είναι μη διασπώμενη ισοδυναμεί με την υπόθεση ότι όλα τα εμπορεύματα του συστήματος είναι βασικά (*basic*) à la Sraffa (1960, §6).

όπου \mathbf{I} είναι η μοναδιαία μήτρα, \mathbf{q}^* το δεξιό Perron-Frobenius ιδιοδιάνυσμα της μήτρας \mathbf{A} , $\lambda^* (<1)$ η Perron-Frobenius ιδιοτιμή αυτής, $R \equiv (1 - \lambda^*)(\lambda^*)^{-1}$ το μέγιστο ποσοστό κέρδους του συστήματος και $\mathbf{v}^T \equiv \mathbf{I}^T[\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ το διάνυσμα “εργασιακών αξιών”.

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$w = [1 - (r/R)](1+r)^{-1} \quad (3)$$

Από την σχέση (1) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^T &= (1+r)(\mathbf{p}^T \mathbf{A} + w\mathbf{I}^T) \Rightarrow \\ \mathbf{p}^T &= (1+r)\mathbf{p}^T \mathbf{A} + w(1+r)\mathbf{I}^T \Rightarrow \\ \mathbf{p}^T - \mathbf{p}^T \mathbf{A} &= r\mathbf{p}^T \mathbf{A} + w(1+r)\mathbf{I}^T \Rightarrow \\ \mathbf{p}^T[\mathbf{I} - \mathbf{A}] &= r\mathbf{p}^T \mathbf{A} + w(1+r)\mathbf{I}^T \Rightarrow \\ \mathbf{p}^T &= r\mathbf{p}^T \mathbf{A}[\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} + w(1+r)\mathbf{I}^T[\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \Rightarrow \\ \mathbf{p}^T &= r\mathbf{p}^T \mathbf{H} + w(1+r)\mathbf{v}^T \end{aligned} \quad (4)$$

όπου $\mathbf{H} \equiv \mathbf{A}[\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} (>0)$ είναι η μήτρα των “καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών” (Pasinetti, 1973). Αντικαθιστώντας την σχέση (3) στην σχέση (4), προκύπτει:

$$\mathbf{p}^T = r\mathbf{p}^T \mathbf{H} + [1 - (r/R)]\mathbf{v}^T$$

Και αν περαιτέρω ορίσουμε ως $\rho \equiv r/R$ το σχετικό ποσοστό κέρδους³ και ως

$\mathbf{J} \equiv R\mathbf{H}$ μια θετική μήτρα της οποίας η Perron-Frobenius ιδιοτιμή είναι ίση με την μονάδα⁴, τότε λαμβάνουμε:

$$\mathbf{p}^T = \rho\mathbf{p}^T \mathbf{J} + (1 - \rho)\mathbf{v}^T \quad (5)$$

Για $0 \leq \rho < 1$, η (5) γράφεται

³ Από την (3) έπεται

$$r = R(1-w)(wR+1)^{-1}$$

ή

$$\rho = (1-w)[R^{-1}/(R^{-1}+w)] < (1-w)$$

όπου το $1-w$ παριστά τη μερίδα των κερδών στο σφραφαινό ‘Πρότυπο σύστημα’ (Standard system) και ο εντός αγκυλών όρος παριστά το λόγο των μέσων παραγωγής προς το συνολικό κεφάλαιο στο ίδιο σύστημα. Συνεπώς, το ρ είναι μικρότερο από τη μερίδα των κερδών στο εν λόγω σύστημα, ενώ ισούται με την τελευταία στην περίπτωση που οι μισθοί καταβάλλονται εξολοκλήρου στο τέλος της περιόδου παραγωγής (διότι σε αυτήν την περίπτωση η (3) γίνεται $w = 1 - (r/R)$ ή $\rho = 1 - w$).

⁴ Επειδή η P-F ιδιοτιμή της \mathbf{H} ισούται με $(1 - \lambda^*)^{-1}\lambda^*$, έπεται ότι η P-F ιδιοτιμή της \mathbf{J} ισούται με $R(1 - \lambda^*)^{-1}\lambda^* = 1$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}^T &= \rho \mathbf{p}^T \mathbf{J} + (1-\rho) \mathbf{v}^T \Rightarrow \\
\mathbf{p}^T [\mathbf{I} - \rho \mathbf{J}] &= (1-\rho) \mathbf{v}^T \Rightarrow \\
\mathbf{p}^T &= (1-\rho) \mathbf{v}^T [\mathbf{I} - \rho \mathbf{J}]^{-1} \Rightarrow \\
\mathbf{p}^T &= (1-\rho) [\mathbf{v}^T + \rho \mathbf{v}^T \mathbf{J} + \rho^2 \mathbf{v}^T \mathbf{J}^2 + \rho^3 \mathbf{v}^T \mathbf{J}^3 + \mathbf{K}] \quad (6)
\end{aligned}$$

Ενώ για $\rho = 1$ από την σχέση (5) λαμβάνουμε $\mathbf{p}^T = (\mathbf{p}^*)^T$, όπου $(\mathbf{p}^*)^T$ είναι το αριστερό Perron-Frobenius ιδιοδιάνυσμα της \mathbf{J} (ή, ισοδυνάμως, της \mathbf{A}).

Η σχέση (6) συνιστά μία πολυωνυμική έκφραση των τιμών παραγωγής μέσω των όρων $(1-\rho)\rho^n$, $n=0,1,2,\dots$, στη βάση της οποίας μπορούμε να συνάγουμε τα ακόλουθα:

(1). Για $\rho < 0.5$, ο όρος $(1-\rho)$ είναι μεγαλύτερος από το άθροισμα όλων των υπολοίπων όρων, ενώ για $\rho < 0.707$, το άθροισμα των δύο πρώτων όρων, δηλαδή

$$(1-\rho) + (1-\rho)\rho = 1 - \rho + \rho - \rho^2 = 1 - \rho^2$$

είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα όλων των υπολοίπων όρων. Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως για σχετικά χαμηλές τιμές του ρ απαιτούνται μάλλον λίγοι όροι του αναπτύγματος του δεξιού μέλους της (6) για μία ικανοποιητική προσέγγιση του διανύσματος \mathbf{p}^T (αναλυτικά, βλ. Steedman, 1999, pp. 314-316). Όσο μικρότερη είναι η τιμή του ρ τόσο λιγότεροι όροι του αναπτύγματος του δεξιού μέλους της σχέσης (6) απαιτούνται, ώστε να πλησιάσουμε πιο κοντά στο πραγματικό διάνυσμα των τιμών \mathbf{p}^T .

(2). Είναι γνωστό (βλ. π.χ. Barnett, 1990, pp. 156-157 and 394) πως για κάθε (ημι-)θετικό διάνυσμα \mathbf{y}^T , το διάνυσμα $\mathbf{y}^T \mathbf{J}^k$ τείνει στο $(\mathbf{p}^*)^T$ του $k \rightarrow +\infty$, δηλαδή

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{y}^T \mathbf{J}^k = [\mathbf{y}^T \mathbf{q}^* / (\mathbf{p}^*)^T \mathbf{q}^*] (\mathbf{p}^*)^T$$

Στην περίπτωση αυτή, αν θεωρήσουμε πως το διάνυσμα \mathbf{y}^T είναι το διάνυσμα των εργασιακών αξιών \mathbf{v}^T , τότε για ένα επαρκώς μεγάλο m μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbf{v}^T \mathbf{J}^m \approx \mathbf{v}^T \mathbf{J}^{m+1} \approx \mathbf{v}^T \mathbf{J}^{m+2} \approx \mathbf{K} \approx [\mathbf{v}^T \mathbf{q}^* / (\mathbf{p}^*)^T \mathbf{q}^*] (\mathbf{p}^*)^T = (\mathbf{p}^*)^T$$

Ανακαλώντας, όμως, την σχέση (2α) έχουμε:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{J}^m \approx \mathbf{v}^T \mathbf{J}^{m+1} \approx \mathbf{v}^T \mathbf{J}^{m+2} \approx \mathbf{K} \approx (\mathbf{p}^*)^T \quad (7)$$

Η σχέση (6) στην οποία καταλήξαμε παραπάνω δίνεται από τον τύπο:

$$\mathbf{p}^T = (1-\rho) [\mathbf{v}^T + \rho \mathbf{v}^T \mathbf{J} + \rho^2 \mathbf{v}^T \mathbf{J}^2 + \rho^3 \mathbf{v}^T \mathbf{J}^3 + \mathbf{K}]$$

Καθώς ο εκθέτης μεγαλώνει, κάποια στιγμή όταν αυξηθεί αρκετά θα εμφανιστεί κάπου ο εκθέτης m , δηλαδή

$$\mathbf{p}^T \approx (1-\rho)[\mathbf{v}^T + \rho\mathbf{v}^T\mathbf{J} + \rho^2\mathbf{v}^T\mathbf{J}^2 + \rho^3\mathbf{v}^T\mathbf{J}^3 + \mathbf{K} + \rho^{m-1}\mathbf{v}^T\mathbf{J}^{m-1} + \rho^m\mathbf{v}^T\mathbf{J}^m + \rho^{m+1}\mathbf{v}^T\mathbf{J}^{m+1} + \mathbf{K}]$$

Εισάγοντας στην παραπάνω σχέση την (7) λαμβάνουμε

$$\mathbf{p}^T \approx (1-\rho)[\mathbf{v}^T + \rho\mathbf{v}^T\mathbf{J} + \rho^2\mathbf{v}^T\mathbf{J}^2 + \rho^3\mathbf{v}^T\mathbf{J}^3 + \mathbf{K} + \rho^{m-1}\mathbf{v}^T\mathbf{J}^{m-1} + \rho^m(\mathbf{p}^*)^T + \rho^{m+1}(\mathbf{p}^*)^T + \mathbf{K}] \Rightarrow$$

$$\mathbf{p}^T \approx (1-\rho)[\mathbf{v}^T + \rho\mathbf{v}^T\mathbf{J} + \rho^2\mathbf{v}^T\mathbf{J}^2 + \rho^3\mathbf{v}^T\mathbf{J}^3 + \mathbf{K} + \rho^{m-1}\mathbf{v}^T\mathbf{J}^{m-1} + (\rho^m + \rho^{m+1} + \mathbf{K})(\mathbf{p}^*)^T] \quad (7\alpha)$$

Ως γνωστόν, $(1-\rho)^{-1} = [1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \mathbf{K}]$

$$\text{άρα και } \rho^m(1-\rho)^{-1} = \rho^m[1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \mathbf{K}]$$

$$\text{ή, } \rho^m(1-\rho)^{-1} = \rho^m + \rho^{m+1} + \rho^{m+2} + \rho^{m+3} + \mathbf{K} \quad (7\beta)$$

Εισάγοντας την (7β) στην σχέση (7α) προκύπτει:

$$\mathbf{p}^T \approx (1-\rho)[\mathbf{v}^T + \rho\mathbf{v}^T\mathbf{J} + \rho^2\mathbf{v}^T\mathbf{J}^2 + \rho^3\mathbf{v}^T\mathbf{J}^3 + \mathbf{K} + \rho^{m-1}\mathbf{v}^T\mathbf{J}^{m-1} + \rho^m(1-\rho)^{-1}(\mathbf{p}^*)^T] \Rightarrow$$

$$\mathbf{p}^T \approx (1-\rho)[\mathbf{v}^T + \rho\mathbf{v}^T\mathbf{J} + \rho^2\mathbf{v}^T\mathbf{J}^2 + \rho^3\mathbf{v}^T\mathbf{J}^3 + \mathbf{K} + \rho^{m-1}\mathbf{v}^T\mathbf{J}^{m-1}] + \rho^m(\mathbf{p}^*)^T \quad (8)$$

Η σχέση (8) συνιστά μια πολυωνυμική προσέγγιση του διανύσματος των τιμών παραγωγής (προσέγγιση του Bienefeld, 1988). Εκ κατασκευής είναι ακριβής στις δύο ακραίες τιμές του σχετικού ποσοστού κέρδους, δηλαδή

$$\text{για } \rho = 0 \text{ λαμβάνουμε } \mathbf{p}^T = \mathbf{v}^T$$

$$\text{ενώ για } \rho = 1 \text{ λαμβάνουμε } \mathbf{p}^T = (\mathbf{p}^*)^T$$

Πιο συγκεκριμένα, από την σχέση (8) για $m = 1$ προκύπτει μια γραμμική προσέγγιση, δηλαδή

$$\mathbf{p}^T \approx (1-\rho)[\mathbf{v}^T] + \rho(\mathbf{p}^*)^T \Rightarrow$$

$$\mathbf{p}^T \approx \mathbf{v}^T - \rho\mathbf{v}^T + \rho(\mathbf{p}^*)^T \Rightarrow$$

$$\mathbf{p}^T \approx \mathbf{v}^T + \rho[(\mathbf{p}^*)^T - \mathbf{v}^T] \quad (9)$$

ενώ για $m = 2$ προκύπτει μια δευτεροβάθμια προσέγγιση⁵, δηλαδή

⁵ Θεώρησε την τιμή του εμπορεύματος j . Από την (5) έπεται ότι

$$(p_j/v_j) - 1 = R\rho(k_j - R^{-1}) \quad (5\alpha)$$

και, άρα,

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}^T &\approx (1-\rho)[\mathbf{v}^T + \rho\mathbf{v}^T\mathbf{J}] + \rho^2(\mathbf{p}^*)^T \Rightarrow \\
\mathbf{p}^T &\approx (1-\rho)\mathbf{v}^T + (1-\rho)\rho\mathbf{v}^T\mathbf{J} + \rho^2(\mathbf{p}^*)^T \Rightarrow \\
\mathbf{p}^T &\approx \mathbf{v}^T - \rho\mathbf{v}^T + \rho\mathbf{v}^T\mathbf{J} - \rho^2\mathbf{v}^T\mathbf{J} + \rho^2(\mathbf{p}^*)^T \Rightarrow \\
\mathbf{p}^T &\approx \mathbf{v}^T + \rho[\mathbf{v}^T\mathbf{J} - \mathbf{v}^T] + \rho^2[(\mathbf{p}^*)^T - \mathbf{v}^T\mathbf{J}] \Rightarrow
\end{aligned} \tag{10}$$

Και αν συνεχίσουμε, για $m = 3$, θα λάβουμε μια τριτοβάθμια προσέγγιση, δηλαδή

$$\mathbf{p}^T \approx \mathbf{v}^T + \rho[\mathbf{v}^T\mathbf{J} - \mathbf{v}^T] + \rho^2[\mathbf{v}^T\mathbf{J}^2 - \mathbf{v}^T\mathbf{J}] + \rho^3[(\mathbf{p}^*)^T - \mathbf{v}^T\mathbf{J}^2], \text{ κτλ.}$$

Η ακρίβεια της προσέγγισης (8) εξαρτάται από την ταχύτητα σύγκλισης (*speed of convergence*) του διανύσματος $\mathbf{v}^T\mathbf{J}^m$ προς το διάνυσμα $(\mathbf{p}^*)^T$. Με λίγα λόγια, όσο μικρότερος είναι εκείνος ο εκθέτης m που μας δίνει την σχέση (7) τόσο γρηγορότερη θα είναι η σύγκλιση και τόσο πιο ακριβής η προσέγγιση της σχέσης (8).

Η ταχύτητα αυτή, με τη σειρά της, εξαρτάται θετικά από το ύψος των λόγων (βλ. π.χ. Barnett, 1990, p. 158)

$$\Lambda^* / |\Lambda_i| = 1 / |\Lambda_i| = (\lambda^* |1 - \lambda_i|) / [(1 - \lambda^*) |\lambda_i|] (> \lambda^* / |\lambda_i|) \tag{11}$$

όπου το $\Lambda^* = 1$ παριστά την Perron-Frobenius ιδιοτιμή της \mathbf{J} και το $|\Lambda_i|$ (το $|\lambda_i|$), $i = 2, 3, \dots, n$, το μέτρο (*modulus*) των υποδεσποζουσών (*subdominant*) ιδιοτιμών της

$$d(p_j / v_j) / d\rho = R[(dk_j / d\rho)\rho + (k_j - R^{-1})] \tag{5\beta}$$

όπου $k_j \equiv \mathbf{p}\mathbf{H}_j / v_j$ είναι η ένταση κεφαλαίου στον καθέτως ολοκληρωμένο τομέα παραγωγής του εν λόγω εμπορεύματος, \mathbf{H}_j η στήλη j της \mathbf{H} , και R^{-1} η ένταση κεφαλαίου στο 'Πρότυπο σύστημα' (η οποία δεν εξαρτάται από τις τιμές και την κατανομή του εισοδήματος). Από την προσεγγιστική σχέση (10) έπεται

$$p_j \approx v_j + R(k_j(0) - R^{-1})v_j\rho + R(k_j(1) - k_j(0))v_j\rho^2 \tag{10\alpha}$$

και, άρα,

$$d(p_j / v_j) / d\rho = R(k_j(0) - R^{-1}) + 2R(k_j(1) - k_j(0))\rho \tag{10\beta}$$

όπου $k_j(0) \equiv \mathbf{v}^T\mathbf{H}_j / v_j$ ($k_j(1) \equiv p_j^* / (v_j R)$) η τιμή του k_j για $\rho = 0$ (για $\rho = 1$). Από τις (10α)-(10β) έπεται, εύκολα, ότι εάν ρ' είναι η τιμή στην οποία η τιμή του εμπορεύματος j εμφανίζει ακρότατο (ήτοι $d(p_j / v_j) / d\rho = 0$) και $\rho'' (\neq 0)$ είναι η τιμή στην οποία το p_j γίνεται - εκ νέου - ίσο με το v_j , τότε ισχύει $\rho'' = 2\rho'$ (αναλυτικά για όλα αυτά, βλ. Mariolis and Tsoulfidis, 2008, Section 2, εξισώσεις (10), (24) και (25)).

\mathbf{J} (της \mathbf{A}), δηλ. όλων των υπολοίπων ιδιοτιμών, πλην της Perron-Frobenius ⁶. Αυτό σημαίνει πως η πολυωνυμική προσέγγιση Bienenfeld (1988) είναι τόσο πιο ακριβής όσο μεγαλύτερη (κατά μέτρο) είναι η Perron-Frobenius ιδιοτιμή της \mathbf{J} από τις υπόλοιπες ιδιοτιμές αυτής. Γιατί όσο μεγαλύτερη είναι η Perron-Frobenius ιδιοτιμή της \mathbf{J} από τις υπόλοιπες ιδιοτιμές τόσο μεγαλύτεροι είναι και οι λόγοι $1/|\Lambda_i|$ που επηρεάζουν θετικά την ταχύτητα σύγκλισης. Εφαρμόζοντας ένα γνωστό θεώρημα του E. Hopf, το οποίο αφορά στο λόγο των μέτρων της Perron-Frobenius ιδιοτιμής μίας θετικής μήτρας προς την υποδεσπόζουσα ιδιοτιμή αυτής ⁷, λαμβάνουμε:

$$\max(|\Lambda_i|) / \Lambda^* = \max(|\Lambda_i|) \leq (M - \mu)(M + \mu)^{-1} < 1 \quad (12)$$

όπου το M παριστά το μεγαλύτερο και το μ παριστά το μικρότερο των στοιχείων της μήτρας \mathbf{J} . Η σχέση (12) δηλώνει ότι το μέτρο της μεγαλύτερης υποδεσπόζουσας ιδιοτιμής της μήτρας \mathbf{J} είναι μικρότερο ή ίσο με το μέγεθος $\frac{(M - \mu)}{(M + \mu)} < 1$. Βάσει της

(12) δυνάμεθα να συμπεράνουμε ότι όσο πιο όμοια είναι τα στοιχεία της μήτρας \mathbf{J} τόσο μικρότερη είναι η διαφορά $M - \mu$ και, άρα, τόσο μεγαλύτερο είναι το $1/\max(|\Lambda_i|)$, πράγμα που συνεπάγεται, με τη σειρά του, ότι τόσο περισσότερο ακριβής είναι μία προσέγγιση των τιμών παραγωγής μέσω ενός πολυωνύμου χαμηλής τάξης.

⁶ Υπενθυμίζεται ότι η γενική μορφή μίας υποδεσπόζουσας ιδιοτιμής είναι $\Lambda_i \equiv \alpha + \beta i$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί και $i \equiv \sqrt{-1}$, ενώ το μέτρο της ορίζεται ως $|\Lambda_i| \equiv \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

⁷ Για το εν λόγω θεώρημα, καθώς και για συναφή θεωρήματα, βλ. π.χ. Rothblum and Tan (1985).

Συμπεράσματα

Εκθέσαμε, αρχικά, τον τρόπο εξαγωγής της προσέγγισης Bienefeld, η οποία δίνεται από την σχέση (8) και αποτελεί πολυωνυμικό ανάπτυγμα. Εν συνεχεία, ορίσαμε από τι εξαρτάται η ακρίβεια της προσέγγισης και τέλος ακολούθησε η σύνδεση της ακρίβειας αυτής με την κατανομή των ιδιοτιμών.

Μέχρι σήμερα τα μόνα διαθέσιμα αποτελέσματα που έχουν προκύψει από την μελέτη του ζητήματος αυτού αφορούν στον πίνακα εισροών- εκροών της Κινεζικής οικονομίας για το έτος 1997⁸. Με βάση τα δεδομένα του εν λόγω πίνακα εισροών – εκροών προέκυψε ότι, οι τιμές παραγωγής που αντιστοιχούν στον πίνακα αυτό προσεγγίζονται ικανοποιητικά από την δευτεροβάθμια προσέγγιση σε όλο το εύρος τιμών του ρ . Στην συνέχεια της μελέτης μας, με δεδομένα που θα λάβουμε από τους πίνακες εισροών – εκροών της Φινλανδίας για τα έτη 1995 και 2004, της Σουηδίας για τα έτη 1995 και 2005, της Γερμανίας για τα έτη 2000 και 2002, της Γαλλίας για τα έτη 1995 και 2005 και τέλος της Δανίας για τα έτη 2000 και 2004, θα εξετάσουμε αν η δευτεροβάθμια προσέγγιση με βάση την τιμή του ισχύοντος σχετικού ποσοστού κέρδους ρ προσεγγίζει ικανοποιητικά το διάνυσμα των τιμών παραγωγής για καθεμία από τις εξεταζόμενες δέκα περιπτώσεις. Έτσι θα διαπιστώσουμε αν τα αποτελέσματα που προέκυψαν για την Κινεζική οικονομία μπορούν να θεωρηθούν αντιπροσωπευτικά. Επίσης, για κάθε περίπτωση θα εξετάσουμε την ταχύτητα σύγκλισης του διανύσματος $\mathbf{v}^T \mathbf{J}^m$ προς το διάνυσμα $(\mathbf{p}^*)^T$, διότι από την ταχύτητα αυτή εξαρτάται η ακρίβεια της προσέγγισης.

Τέλος, με βάση τα εμπειρικά δεδομένα που θα λάβουμε από τους δέκα πίνακες εισροών- εκροών, ο προσδιορισμός μιας σειράς μεγεθών, η τιμή των οποίων σχετίζεται με την κατανομή των ιδιοτιμών, θα μας δώσει την δυνατότητα να ελέγξουμε την ύπαρξη ή μη άμεσων ποσοτικών συσχετίσεων ανάμεσα στα συγκεκριμένα μεγέθη και στα μεγέθη που θα εξάγουμε και προσδιορίζουν την ακρίβεια της προσέγγισης⁹.

Έτσι, λοιπόν, τα όσα εκτίθενται παραπάνω καλούμαστε να εξετάσουμε βάσει εμπειρικών δεδομένων που προέρχονται από δέκα πίνακες εισροών - εκροών. Οι πίνακες αυτοί αφορούν πέντε χώρες, για κάθε χώρα, όμως, θα εξετασθούν δύο έτη. Αυτό πραγματεύεται το κεφάλαιο 2 της παρούσας εργασίας που ακολουθεί.

⁸ Βλ. Mariolis and Tsoulfidis, 2008

⁹ Τον προσδιορισμό των απαιτούμενων για την μελέτη μεγεθών πραγματεύεται το υποκεφάλαιο 2.2 της παρούσας εργασίας που ακολουθεί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο
ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Εισαγωγή

Στο παρόν μέρος της εργασίας θα παρουσιάσουμε τα εμπειρικά μας δεδομένα, τους υπολογισμούς που έχουν διεξαχθεί και τα αποτελέσματα που προέκυψαν. Αρχικά, θα περιγράψουμε πώς από τους πίνακες εισροών – εκροών που διαθέτουμε εξάγουμε την μήτρα των τεχνικών συντελεστών, το διάνυσμα της άμεσης ομοιογενούς εργασίας και το διάνυσμα του πραγματικού ωρομισθίου. Έπειτα, έχοντας πλέον ως δεδομένα τα μεγέθη $[A, I, b]$ θα περιγράψουμε τους απαραίτητους για την μελέτη μας υπολογισμούς και θα παραθέσουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν. Περαιτέρω, ακολουθεί ο σχολιασμός των αποτελεσμάτων και η προσπάθεια εξαγωγής συμπερασμάτων.

2.1 Ανάλυση Εμπειρικών Δεδομένων

Τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν, ώστε να πραγματοποιηθούν οι απαραίτητοι για την μελέτη μας υπολογισμοί, προέρχονται από πίνακες εισροών – εκροών πέντε συνολικά χωρών. Για κάθε χώρα, όμως, μελετήθηκαν δύο έτη. Πρόκειται για συμμετρικούς πίνακες εισροών – εκροών (symmetric input-output tables – SIOT), οι οποίοι προέρχονται από την Eurostat. Συγκεκριμένα, οι πίνακες εισροών – εκροών από τους οποίους αντλήθηκαν τα δεδομένα είναι: της Φινλανδίας για τα έτη 1995 και 2004, της Σουηδίας για τα έτη 1995 και 2005, της Γερμανίας για τα έτη 2000 και 2002, της Γαλλίας για τα έτη 1995 και 2005 και τέλος της Δανίας για τα έτη 2000 και 2004. Στους πίνακες εισροών – εκροών όλων των χωρών που αναφέραμε εμφανίζονται 59 κλάδοι. Από αυτούς, όμως, κάποιοι είναι μηδενικοί ή εμφανίζουν μηδενική εργασία, γι' αυτό αυτοί είτε αφαιρέθηκαν είτε συναθροίστηκαν με άλλους κλάδους.

Ειδικότερα, στους πίνακες εισροών – εκροών της Φινλανδίας για τα έτη 1995 και 2004 ο κλάδος 11 (άντληση αγρού πετρελαίου, φυσικού αερίου) και ο κλάδος 12 (εξόρυξη μεταλλευμάτων ουρανίου) παρουσιάζουν μηδενική εργασία και γι' αυτό συναθροίστηκαν με τον κλάδο 13 (εξόρυξη μεταλλούχων μεταλλευμάτων). Συνεπώς, όλες οι μήτρες και τα διανύσματα που προέκυψαν για την Φινλανδία τόσο για το έτος 1995 όσο και για έτος 2004 είναι διαστάσεων 57×57 και 1×57 αντίστοιχα. Ίσων διαστάσεων είναι οι μήτρες και τα διανύσματα που προέκυψαν για την Γερμανία για τα έτη 2000 και 2002, αφού στους αντίστοιχους πίνακες εισροών – εκροών η εργασία

είναι μηδενική στους κλάδους 12 και 13, οι οποίοι συναθροίστηκαν με τον κλάδο 11. Στους πίνακες εισροών – εκροών της Δανίας για τα έτη 2000 και 2004 μηδενική εργασία εμφανίζουν 3 κλάδοι. Ο κλάδος 12, ο κλάδος 13 και ο κλάδος 10 (εξόρυξη άνθρακα, λιγνίτη, τύρφης). Τους κλάδους αυτούς τους συναθροίσαμε με τον κλάδο 11. Έτσι, οι μήτρες και τα διανύσματα που λάβαμε για την Δανία είναι διαστάσεων 56×56 και 1×56 αντίστοιχα.

Η Σουηδία τόσο για το έτος 1995 όσο και για το έτος 2005 εμφανίζει μηδενική εργασία στους κλάδους 11 και 12, τους οποίους συναθροίσαμε με τον κλάδο 13. Επιπλέον, από τον πίνακα εισροών – εκροών της Σουηδίας για το έτος 1995 αφαιρέθηκαν ο κλάδος 14 (λοιπά ορυχεία και μεταλλεία), ο κλάδος 16 (παραγωγή προϊόντων καπνού), ο κλάδος 51 (χονδρικό εμπόριο) και ο κλάδος 52 (λιανικό εμπόριο, επισκευή οικιακών συσκευών), καθώς είχαν όλα τα στοιχεία τους μηδενικά. Για τον ίδιο λόγο από τον πίνακα εισροών – εκροών της Σουηδίας για το έτος 2005 αφαιρέθηκαν ο κλάδος 14, ο κλάδος 16, ο κλάδος 32 (συσκευές ραδιοφωνίας, τηλεόρασης, επικοινωνιών), ο κλάδος 51, ο κλάδος 52 και ο κλάδος 74 (άλλες επιχειρηματικές δραστηριότητες). Με βάση, λοιπόν, τα παραπάνω οι μήτρες και τα διανύσματα για το έτος 1995 θα είναι διαστάσεων 53×53 και 1×53 αντίστοιχα, ενώ για το 2005 51×51 και 1×51 .

Από τα αρχικά στοιχεία της Γαλλίας για το έτος 1995 αφαιρέθηκε ο κλάδος 37 (ανακύκλωση) που είχε όλα τα στοιχεία του μηδενικά και από το έτος 2005 αφαιρέθηκε ο κλάδος 37 και ο κλάδος 12, ο πρώτος διότι είχε όλα του τα στοιχεία μηδενικά και ο δεύτερος διότι εμφάνιζε τόσο τα στοιχεία του μηδενικά όσο και την εργασία. Έτσι, οι μήτρες και τα διανύσματα για το έτος 1995 είναι διαστάσεων 58×58 και 1×58 αντίστοιχα, ενώ για το 2005 57×57 και 1×57 .

Τέλος, πρέπει να αναφέρουμε πως τα αρχικά στοιχεία τα συλλέξαμε σε μορφή excel, ενώ για τους υπολογισμούς μας εργαστήκαμε με το πρόγραμμα “Mathematica”.

2.1.1 Εξαγωγή της Μήτρας Τεχνικών Συντελεστών

Η Ανάλυση Εισροών – Εκροών έχει εξελιχθεί σ’ ένα πολύ σημαντικό κλάδο της οικονομικής επιστήμης. Αντιλαμβάνεται την οικονομία ως ένα σύστημα και την παρουσιάζει με την βοήθεια ενός πίνακα εισροών – εκροών. Ένας πίνακας εισροών – εκροών αναφέρεται σε μια συγκεκριμένη οικονομική περιοχή και συνήθως καλύπτει χρονική περίοδο ενός έτους. Κάθε οικονομική περιοχή, είτε αυτή είναι κράτος είτε είναι περιφέρεια, διαιρείται σε τομείς και κλάδους. Σκοπός ενός πίνακα εισροών – εκροών είναι να περιγράψει τις συναλλαγές που λαμβάνουν χώρα ανάμεσα τους.

Αν υποθέσουμε πως μια οικονομία έχει μόνο δύο τομείς, τον πρωτογενή που συμβολίζουμε με τον αριθμό 1 και τον δευτερογενή που συμβολίζουμε με τον αριθμό 2, τότε ένας τυπικός πίνακας εισροών – εκροών, απλής παραγωγής (single production), που περιγράφει αυτή την οικονομία έχει την παρακάτω μορφή:

Πίνακας 1

Εισροές \ Εκροές	Ενδιάμεση Ζήτηση		Τελική Ζήτηση	Συνολικές Εκροές
	1	2		
Τομείς	1	2		
1	Z_{11}	Z_{12}	Y_1	X_1
2	Z_{21}	Z_{22}	Y_2	X_2
Προστιθέμενη αξία	V_1	V_2		
Συνολικές εκροές	X_1	X_2		

όπου Z_{ij} η σε χρήμα εκφρασμένη ποσότητα του εμπορεύματος i που εισέρχεται στην παραγωγή του εμπορεύματος j , V_j οι πρωτογενείς εισροές που απαιτήθηκαν για την παραγωγή του τομέα j , Y_j η τελική ζήτηση του τομέα j και X_j οι συνολικές εκροές του τομέα j . Με λίγα λόγια, ένας πίνακας εισροών – εκροών είναι ένας “πίνακας διπλής εισόδου όπου ο κάθε τομέας εμφανίζεται δύο φορές. Μια φορά στις γραμμές του πίνακα ως παραγωγός προϊόντων (εκροών) για ικανοποίηση της ενδιάμεσης και τελικής ζήτησης, και μια φορά στις στήλες του πίνακα ως αγοραστής αγαθών και υπηρεσιών (εισροών) για την παραγωγή των προϊόντων του”¹⁰.

Για μια οικονομία με n - παραγωγικούς τομείς ο αντίστοιχος πίνακας εισροών-εκροών θα είχε την ακόλουθη μορφή:

¹⁰ Βλ. Λίβας, (1994, σελ. 15 § 2.1)

Πίνακας 2

Εκροές Εισροές					Τελική Ζήτηση	Συνολικές Εκροές
Τομείς	1	2	...	n		
1	Z_{11}	Z_{12}	...	Z_{1n}	Y_1	X_1
2	Z_{21}	Z_{22}	...	Z_{2n}	Y_2	X_2
...
n	Z_{n1}	Z_{n2}	...	Z_{nn}	Y_n	X_n
Προστιθέμενη αξία	V_1	V_2	...	V_n		
Συνολικές εκροές	X_1	X_2	...	X_n		

Οι πίνακες εισροών – εκροών που έχουμε στην διάθεση μας έχουν ανάλογη μορφή με τους πίνακες που παρουσιάσαμε παραπάνω. Από αυτούς τους πίνακες είμαστε σε θέση να εξάγουμε για κάθε χώρα την μήτρα **A**, δηλαδή την μήτρα τεχνικών συντελεστών. Κάθε στοιχείο της μήτρας τεχνικών συντελεστών μας δείχνει την ποσότητα του κάθε αγαθού που απαιτείται ώστε να παραχθεί ποσότητα μιας νομισματικής μονάδας από το προϊόν του κάθε παραγωγικού τομέα. Πιο συγκεκριμένα αν η μήτρα τεχνικών συντελεστών είναι της μορφής:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & K & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & K & a_{2n} \\ K & K & K & K \\ a_{n1} & a_{n2} & K & a_{nn} \end{pmatrix}$$

το στοιχείο a_{11} της μήτρας **A** υποδηλώνει την ποσότητα του αγαθού 1 που απαιτείται για να παραχθεί ποσότητα αξίας μιας νομισματικής μονάδας από το προϊόν του κλάδου 1, το στοιχείο a_{12} υποδηλώνει την ποσότητα του αγαθού 1 που απαιτείται για να παραχθεί ποσότητα αξίας μιας νομισματικής μονάδας από το προϊόν του κλάδου 2, κτλ.

Αν, λοιπόν, όπως ορίσαμε πριν Z_{ij} είναι η ποσότητα του εμπορεύματος i που εισέρχεται σε όλη την παραγωγή του εμπορεύματος του κλάδου j και X_j οι συνολικές

εκροές του τομέα j , τότε κάθε στοιχείο της μήτρας \mathbf{A} προκύπτει “διαιρώντας κάθε στοιχείο Z_{ij} του πίνακα εισροών- εκροών με το σύνολο της στήλης στην οποία το υπόψη στοιχείο καταχωρείται”¹¹.

Άρα ισχύει:

$$a_{ij} = \frac{Z_{ij}}{X_j} \quad (13)$$

Σημειώνουμε πως στους πίνακες εισροών – εκροών που διαθέτουμε το σύνολο της στήλης στην οποία το κάθε στοιχείο καταχωρείται εμφανίζεται στην γραμμή με την ονομασία Output at basic prices (συνολική παραγωγή σε βασικές τιμές).

Με λίγα λόγια, για κάθε χώρα διαθέτουμε τα στοιχεία της μήτρας \mathbf{Z} . Για κάθε στοιχείο Z_{ij} της μήτρας \mathbf{Z} ισχύει το εξής

$$Z_{ij} = p_i a_{ij} x_j \quad (14)$$

όπου p_i η χρηματική τιμή μιας μονάδας του εμπορεύματος i , a_{ij} οι μονάδες του εμπορεύματος i που απαιτούνται για να παραχθεί μια μονάδα του εμπορεύματος j και x_j η ακαθάριστη εκροή εκφρασμένη σε φυσική ποσότητα.

Επίσης ισχύει:

$$X_i = p_i x_i \quad (15)$$

Έστω, τώρα, πως έχουμε μια οικονομία με δύο παραγωγικούς τομείς που περιγράφεται από τον Πίνακα 1. Η μήτρα \mathbf{Z} αυτής της οικονομίας έχει την μορφή:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}$$

ή, ισοδυνάμως,

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} p_1 a_{11} x_1 & p_1 a_{12} x_2 \\ p_2 a_{21} x_1 & p_2 a_{22} x_2 \end{pmatrix}$$

Επίσης, από την σχέση (15) ισχύει:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} p_1 x_1 \\ p_2 x_2 \end{pmatrix}$$

Υποθέτουμε πως η τιμή κάθε προϊόντος ισούται με μια νομισματική μονάδα. Θεωρούμε, δηλαδή, ως φυσική μονάδα μέτρησης κάθε εμπορεύματος εκείνη την ποσότητα του που πωλείται μια νομισματική μονάδα. Με βάση αυτή την υπόθεση $p_1 = p_2 = 1$.

¹¹ Βλ. Λίβας, (1994, σελ. 15 § 2.1)

Άρα,

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Για να προκύψει, λοιπόν, η μήτρα τεχνικών συντελεστών, δηλαδή η μήτρα

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Θα πολλαπλασιάσουμε την μήτρα \mathbf{Z} με την αντίστροφη της διαγωνίου του \mathbf{X} , ήτοι

$$\text{με την } (\hat{\mathbf{X}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1/x_1 & 0 \\ 0 & 1/x_2 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, $\mathbf{A} \equiv \mathbf{Z}(\hat{\mathbf{X}})^{-1}$.

2.1.2 Εξαγωγή του Διάνυσματος της Άμεσης, Ομοιογενούς Εργασίας

Στην πραγματικότητα η εργασία είναι ετερογενής. Έτσι και στους εμπειρικούς πίνακες που διαθέτουμε η εργασία εμφανίζεται ως ετερογενής. Κι' αυτό συμβαίνει διότι η αγορά εργασίας δεν χαρακτηρίζεται από ένα ενιαίο ονομαστικό-χρηματικό ωρομίσθιο. Οι μισθοί των εργαζομένων αντανακλούν διαφορετικά ονομαστικά ωρομίσθια για κάθε κλάδο. Για να προχωρήσουμε, λοιπόν, στους υπολογισμούς μας θα πρέπει να εξάγουμε ένα διάνυσμα άμεσης ομοιογενούς εργασίας. Αυτό θα γίνει μετατρέποντας την ετερογενή εργασία σε ομοιογενή με την ακόλουθη μέθοδο:

Το διάνυσμα της απασχόλησης μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\mathbf{L} = [L_1, L_2, \mathbf{K}, L_n] = [l_1^* X_1, l_2^* X_2, \mathbf{K}, l_n^* X_n]$$

όπου L_j ο αριθμός των εργαζομένων στον κλάδο j . Σημειώνουμε ότι το μέγεθος αυτό δίνεται από την γραμμή με την ονομασία Labour Inputs – 1000 persons του κάθε πίνακα εισροών – εκροών, l_j^* η ποσότητα εργασίας που απαιτείται ώστε να παραχθεί μία μονάδα του αγαθού j και $l_j^* X_j$ η συνολική ποσότητα εργασίας που απαιτείται για να παραχθεί το αγαθό j .

Οι αποζημιώσεις των μισθωτών ως διάνυσμα περιγράφονται από τον τύπο

$$\mathbf{W} = [W_1, W_2, \mathbf{K}, W_n] = [w_1 L_1, w_2 L_2, \mathbf{K}, w_n L_n]$$

όπου w_j το ονομαστικό ωρομίσθιο του κλάδου j , το οποίο δίνεται από τον τύπο

$$[w_1, w_2, \mathbf{K}, w_n] = [W_1 / L_1, W_2 / L_2, \mathbf{K}, W_n / L_n]$$

Το διάνυσμα ανομοιογενούς εργασίας, το οποίο μας δίνει την εργασία ανά μονάδα παραγόμενου προϊόντος σε κάθε κλάδο, προκύπτει ως εξής

$$\mathbf{L}(\hat{\mathbf{X}})^{-1} = (L_1 / X_1, L_2 / X_2, \mathbf{K}, L_n / X_n) = (l_1^*, l_2^*, \mathbf{K}, l_n^*)$$

Στη συνέχεια, θα πρέπει να εντοπίσουμε εκείνο το ονομαστικό ωρομίσθιο που έχει την ελάχιστη τιμή, το οποίο συμβολίζουμε με w_{\min} .

Το διάνυσμα \mathbf{I} των εισροών σε άμεση ομοιογενή εργασία δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{I} = \left[\frac{W_1}{w_{\min}} l_1^*, \frac{W_2}{w_{\min}} l_2^*, \mathbf{K}, \frac{W_n}{w_{\min}} l_n^* \right]$$

Με λίγα λόγια, με αυτόν τον τρόπο ομογενοποιούμε την εργασία με βάση την εργασία εκείνου του κλάδου στον οποίο το ονομαστικό ωρομίσθιο έχει την μικρότερη τιμή.

2.1.3 Εξαγωγή του Διάνυσματος του Πραγματικού Ωρομισθίου

Από τα στοιχεία που λαμβάνουμε από τους πίνακες εισροών – εκροών δυνάμεθα να υπολογίσουμε και το διάνυσμα του πραγματικού ωρομισθίου. Πρόκειται για διάνυσμα στήλη διαστάσεων 57×1 για τις χώρες της Φινλανδίας και της Γερμανίας, 53×1 για το έτος 1995 της Σουηδίας, 51×1 για το έτος 2005 της Σουηδίας, 56×1 για τα δύο έτη της Δανίας, 58×1 και 57×1 για τα έτη 1995 και 2005 της Γαλλίας. Η βασική υπόθεση στην οποία στηριζόμαστε για να εξάγουμε το διάνυσμα του πραγματικού ωρομισθίου είναι πως όλα τα νοικοκυριά κάθε χώρας που μελετάμε χαρακτηρίζονται από μια ενιαία σύνθεση κατανάλωσης, δηλαδή υποθέτουμε ότι η σύνθεση του πραγματικού ωρομισθίου είναι ίδια με τη σύνθεση της τελικής κατανάλωσης των νοικοκυριών. Το μέγεθος αυτό δίνεται από τη στήλη με την ονομασία Final Consumption Expenditure by households του κάθε πίνακα

εισροών – εκροών και το συμβολίζουμε ως εξής $C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ M \\ C_n \end{bmatrix}$

Το διάνυσμα του πραγματικού ωρομισθίου \mathbf{b} προσδιορίζεται από τον τύπο

$$\mathbf{b} = \frac{w_{\min}}{\mathbf{e}^T \mathbf{C}} \mathbf{C}$$

ή, ισοδυνάμως,

$$\mathbf{b} = \frac{w_{\min}}{(C_1 + C_2 + K + C_n)} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ M \\ C_n \end{bmatrix} \quad (16)$$

Ας δούμε τώρα πως προκύπτει ο τύπος αυτός:

Το ωρομισθιο σε όρους των τιμών παραγωγής δίδεται από την σχέση

$$w = \mathbf{p}\mathbf{b} \quad (17)$$

Επίσης, ισχύει πως

$$\mathbf{b} = c\mathbf{C} \quad (18)$$

όπου w το ονομαστικό ωρομισθιο, \mathbf{p} το $1 \times n$ διάνυσμα των τιμών, \mathbf{C} το διάνυσμα της σύνθεσης του πραγματικού ωρομισθίου και c το βαθμωτό που παριστά το ύψος του πραγματικού ωρομισθίου.

Από τις (17) και (18) λαμβάνουμε

$$c \equiv \frac{w}{\mathbf{p} \mathbf{C}} \quad (19)$$

Τώρα, η (18) γράφεται

$$\mathbf{b} = c\mathbf{C} = \frac{w}{\mathbf{p}\mathbf{C}}\mathbf{C} = \frac{w}{\mathbf{e}^T\mathbf{C}}\mathbf{C}$$

Για να προσδιορίσουμε το διάνυσμα του πραγματικού ωρομισθίου λαμβάνουμε εκείνο το w_j που έχει την ελάχιστη τιμή, δηλαδή το w_{\min} , όπως ακριβώς και κατά την διαδικασία ομογενοποίησης της εργασίας¹². Άρα το διάνυσμα του πραγματικού ωρομισθίου δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{b} = \frac{w_{\min}}{\mathbf{e}^T\mathbf{C}}\mathbf{C}$$

ή, ισοδυνάμως,

$$\mathbf{b} = \frac{w_{\min}}{(C_1 + C_2 + K + C_n)} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \mathbf{M} \\ C_n \end{bmatrix}.$$

¹² Υπενθυμίζουμε ότι, έχουμε υποθέσει πως θεωρούμε ως φυσική μονάδα μέτρησης κάθε εμπορεύματος εκείνη την ποσότητα του που αξίζει μια νομισματική μονάδα, γι' αυτό $\mathbf{p} = \mathbf{e}^T$.

2.2 Υπολογισμός των Υπολοίπων Απαιτούμενων Μεγεθών

Για να ελεγχθεί η ορθότητα των όσων υποστηρίξαμε στο κεφάλαιο που προηγήθηκε απαιτείται η διεξαγωγή κάποιων υπολογισμών για την εξαγωγή ορισμένων μεγεθών. Στο παρόν υποκεφάλαιο θα περιγράψουμε μια σειρά από υπολογισμούς που έχουν διεξαχθεί για το σκοπό αυτό. Σημειώνουμε πως καθένας από τους υπολογισμούς που θα παρουσιάσουμε εφαρμόστηκε και για τις δέκα περιπτώσεις, έχοντας δηλαδή χρησιμοποιήσει τα εμπειρικά δεδομένα και από τους 10 πίνακες εισροών – εκροών που αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου. Συνεπώς, για όποιο μέγεθος υπολογίσαμε λάβαμε 10 διαφορετικές τιμές, δείγμα σχετικά ικανοποιητικό για να διαπιστώσουμε αν παρατηρείται κάποια συστηματικότητα στους προσδιοριστικούς παράγοντες της συμπεριφοράς των τιμών παραγωγής.

Έτσι, με δεδομένα τα μεγέθη $[A, I, b]$, έχουν εκτιμηθεί τα ακόλουθα μεγέθη:

- i. Το μέγιστο ποσοστό κέρδους του συστήματος $R \equiv (1 - \lambda^*)(\lambda^*)^{-1}$, όπου ως γνωστόν λ^* είναι η Perron-Frobenius ιδιοτιμή της μήτρας A . Για κάθε περίπτωση, λοιπόν, υπολογίσαμε τις ιδιοτιμές της μήτρας A . Από αυτές εκείνη που έχει την μεγαλύτερη τιμή αποτελεί την Perron-Frobenius ιδιοτιμή. Εισάγοντας την τιμή της στον τύπο του μέγιστου ποσοστού κέρδους λάβαμε την αριθμητική του τιμή.
- ii. Το διάνυσμα των τιμών παραγωγής p^T καθώς και το ποσοστό κέρδους του συστήματος r . Και τα δύο μεγέθη προσδιορίστηκαν βάση της ιδιοεξίσωσης¹³

$$p^T = (1 + r)p^T C \quad (20)$$

όπου $C \equiv A + bI^T$.

Από την (20) λαμβάνουμε:
$$p^T \left[\frac{1}{1+r} \right] = p^T C \quad (21)$$

Με βάση την σχέση (21) το αριστερό Perron-Frobenius ιδιοδιάνυσμα της μήτρας C μας δίνει το διάνυσμα των τιμών παραγωγής¹⁴,

¹³ Ως γνωστόν το ωρομίσθιο σε όρους των τιμών παραγωγής δίδεται από τον τύπο $w = p^T b$.

Εισάγοντας την σχέση αυτή στην σχέση (1) λαμβάνουμε την σχέση (20).

¹⁴ Σημειώνουμε πως όλα τα στοιχεία του διανύσματος των τιμών παραγωγής p^T πρέπει να είναι ομόσημα. Στην περίπτωση που εμφανίζονται με αρνητικό πρόσημο τα πολλαπλασιάζουμε με (-1), ώστε να μετατραπούν σε θετικά.

ενώ η Perron-Frobenius ιδιοτιμή της μήτρας \mathbf{C} ισούται με το μέγεθος $\left[\frac{1}{1+r} \right]$.

Επομένως, για κάθε περίπτωση, έχοντας υπολογίσει το αριστερό Perron-Frobenius ιδιοδιάνυσμα της μήτρας \mathbf{C} και την Perron-Frobenius ιδιοτιμή της, προσδιορίστηκαν τόσο το διάνυσμα των τιμών παραγωγής όσο και το ποσοστό κέρδους του συστήματος.

- iii. Το σχετικό ποσοστό κέρδους $\rho \equiv \frac{r}{R}$
- iv. Το διάνυσμα των εργασιακών αξιών $\mathbf{v}^T \equiv \mathbf{I}^T[\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ και η μήτρα \mathbf{J} , την οποία έχουμε ορίσει ως $\mathbf{J} \equiv \mathbf{R}\mathbf{H} \equiv \mathbf{R}\mathbf{A}[\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$.
- v. Η προσέγγιση του διανύσματος των τιμών παραγωγής με βάση την δευτεροβάθμια προσέγγιση της σχέσης (10) και την τιμή του ισχύοντος σχετικού ποσοστού κέρδους ρ , που προέκυψε για κάθε περίπτωση. Την προσέγγιση αυτή συμβολίζουμε με $(\mathbf{p}^a)^T$.
- vi. Η “d-distance” ανάμεσα στο πραγματικό διάνυσμα των τιμών παραγωγής \mathbf{p}^T και στην προσέγγιση του διανύσματος των τιμών παραγωγής $(\mathbf{p}^a)^T$. Η “d-distance” συνιστά ένα μέτρο απόκλισης ανάμεσα σε δυο διανύσματα, το οποίο είναι ανεξάρτητο από τις φυσικές μονάδες μέτρησης. Το μέγεθος αυτό ορίζεται ως $d \equiv \sqrt{2(1 - \cos \theta)}$, όπου θ είναι η ευκλείδια γωνία ανάμεσα στα διανύσματα $\mathbf{p}^T (\hat{\mathbf{p}}^a)^{-1}$, όπου $(\hat{\mathbf{p}}^a)$ είναι η διαγώνια μήτρα που σχηματίζεται με τα στοιχεία του \mathbf{p}^a , και εκείνο το διάνυσμα στήλη, του οποίου όλες οι συνιστώσες ισούνται με 1 (*column summation vector*), ήτοι $\mathbf{e} = [1, 1, \dots, 1]^T$. Το συνημίτιο της γωνίας θ ορίζεται ως εξής: $\cos \theta = \frac{\mathbf{p}^T (\hat{\mathbf{p}}^a)^{-1} \mathbf{e}}{\|\mathbf{p}^T (\hat{\mathbf{p}}^a)^{-1}\| \|\mathbf{e}\|}$.
- vii. Οι ευκλείδιες γωνίες ανάμεσα στα $(\mathbf{p}^*)^T$ και \mathbf{I}^T , και ανάμεσα στα $(\mathbf{p}^*)^T$ και $\mathbf{v}^T \mathbf{J}^m$, με $m = 0, 1, 2, \dots, 5$. Τις γωνίες αυτές συμβολίζουμε με ϕ και ϕ_m ,

αντιστοίχως και εκφράζονται σε μοίρες. Το συνημίτονο της ευκλείδιας γωνίας ανάμεσα στα $(\mathbf{p}^*)^T$ και \mathbf{I}^T ορίζεται ως $\cos \theta = \frac{(\mathbf{p}^*)^T \mathbf{I}^T}{\|(\mathbf{p}^*)^T\| \|\mathbf{I}^T\|}$ και το συνημίτονο

της ευκλείδιας γωνίας ανάμεσα στα $(\mathbf{p}^*)^T$ και $\mathbf{v}^T \mathbf{J}^m$, με $m = 0, 1, 2, \dots, 5$,

$$\text{ορίζεται ως } \cos \theta = \frac{(\mathbf{p}^*)^T \mathbf{v}^T \mathbf{J}^m}{\|(\mathbf{p}^*)^T\| \|\mathbf{v}^T \mathbf{J}^m\|}.$$

- viii. Οι “d-distance” ανάμεσα στα $(\mathbf{p}^*)^T$ και \mathbf{I}^T , και ανάμεσα στα $(\mathbf{p}^*)^T$ και $\mathbf{v}^T \mathbf{J}^m$, με $m = 0, 1, 2, \dots, 5$, μεγέθη τα οποία συμβολίζουμε με d και d_m αντίστοιχα.

Όπως και παραπάνω ορίσαμε $d \equiv \sqrt{2(1 - \cos \theta)}$.

Το συνημίτονο της γωνίας θ για να υπολογίσουμε την “d-distance” ανάμεσα

στα $(\mathbf{p}^*)^T$ και \mathbf{I}^T ορίζεται ως $\cos \theta = \frac{(\mathbf{p}^*)^T (\hat{\mathbf{I}})^{-1} \mathbf{e}}{\|(\mathbf{p}^*)^T (\hat{\mathbf{I}})^{-1}\| \|\mathbf{e}\|}$, ενώ για τις “d-distance”

ανάμεσα στα $(\mathbf{p}^*)^T$ και $\mathbf{v}^T \mathbf{J}^m$, με $m = 0, 1, 2, \dots, 5$ δίνεται από τον τύπο

$$\cos \theta = \frac{(\mathbf{p}^*)^T (\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{J}^m)^{-1} \mathbf{e}}{\|(\mathbf{p}^*)^T (\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{J}^m)^{-1}\| \|\mathbf{e}\|}.$$

- ix. Οι λόγοι $1/\max(|\Lambda_i|)$ και $1/\min(|\Lambda_i|)$.

- x. Ο λόγος $1/\mu_i$, όπου το μ_i παριστά το μέσο όρο των $|\Lambda_i|$, δηλαδή

$$\mu_i \equiv \frac{\sum_{i=2}^n |\Lambda_i|}{n-1}$$

- xi. Η τυπική απόκλιση, σ_i , των $|\Lambda_i|$, δηλαδή

$$\sigma_i \equiv \sqrt{[1/(n-1)] \sum_{i=2}^n (|\Lambda_i| - \mu_i)^2}$$

- xii. Η σχετική (ή τυποποιημένη) εντροπία των ιδιοτιμών της μήτρας \mathbf{J} , $\varepsilon(\Lambda)$, η οποία ορίζεται ως

$$\varepsilon(\Lambda) \equiv \frac{E(\Lambda)}{\log n}$$

όπου $E(\Lambda) \equiv -\sum_{k=1}^n \tau_k \log \tau_k$, $\tau_k \equiv |\Lambda_k| / \sum_{k=1}^n |\Lambda_k|$, $\Lambda_1 \equiv \Lambda^* = 1$ και $\log n$ η μέγιστη

τιμή της εντροπίας $E(\Lambda)$. Η εντροπία είναι ένα μέτρο που μας δείχνει την ομοιότητα των στοιχείων εκείνων για τα οποία υπολογίζεται. Όσο πιο όμοια είναι τα εξεταζόμενα στοιχεία, τόσο μεγαλύτερη θα είναι και η εντροπία ¹⁵. Στην υποθετική περίπτωση που όλες οι ιδιοτιμές έχουν το ίδιο μέτρο, τότε $\tau_k = 1/n$, $\forall k$. Στην περίπτωση αυτή η εντροπία γίνεται μέγιστη και ισούται με $\log n$. Επειδή, όμως, παρατηρήθηκε ότι η εντροπία εξαρτάται από το πλήθος των ιδιοτιμών (δηλ. το n), είναι αναγκαίο, προκειμένου τα αποτελέσματα να είναι συγκρίσιμα μεταξύ τους, να υπολογισθεί η σχετική (ή τυποποιημένη) εντροπία.

- xiii. Και, τέλος ο γεωμετρικός μέσος των υποδεσποζουσών ιδιοτιμών της μήτρας \mathbf{J} , ο οποίος δίνεται από το γινόμενο των υποδεσποζουσών ιδιοτιμών υψωμένο στην δύναμη $1/n - 1$ ¹⁶.

¹⁵ Για μία εισαγωγή στην έννοια της εντροπίας, βλ. π.χ. Γκυγιωμό ([1965] 1984, κεφ. 4), Petz (2001) και Schneider (2007), ενώ για εφαρμογές της σε πίνακες εισροών-εκροών, βλ. π.χ. Proops (1983) και Soofi (1992).

¹⁶ Σημειώνεται ότι, για την εκτίμηση της σχετικής εντροπίας και του γεωμετρικού μέσου παραλείφθηκαν οι μηδενικές υποδεσπόζουσες ιδιοτιμές, ώστε να είναι δυνατή η πραγματοποίηση του υπολογισμού.

2.3 Παράθεση Πινάκων με τα Συνολικά Αποτελέσματα

Συνολικά παρατίθενται δέκα πίνακες. Ένας για κάθε χώρα και κάθε έτος που μελετήσαμε. Ο πρώτος πίνακας που παραθέτουμε αφορά στα αποτελέσματα των μετρήσεων μας για την Φινλανδία και το έτος 1995, με βάση τα εμπειρικά δεδομένα που λάβαμε από τον αντίστοιχο πίνακα εισροών – εκροών της. Ο δεύτερος περιλαμβάνει τα αποτελέσματα που προέκυψαν για την Φινλανδία και το έτος 2004. Έπειτα, ακολουθούν οι πίνακες αποτελεσμάτων της Σουηδίας (για τα έτη 1995 και 2005), της Γερμανίας (για τα έτη 2000 και 2002), της Γαλλίας (για τα έτη 1995 και 2005) και της Δανίας (για τα έτη 2000 και 2004).

Σε κάθε πίνακα αποτελεσμάτων περιλαμβάνονται τα ακόλουθα μεγέθη:

- ◆ Το μέγιστο ποσοστό κέρδους του συστήματος R , το ποσοστό κέρδους του συστήματος r , καθώς και το σχετικό ποσοστό κέρδους του συστήματος ρ .
- ◆ Το μέγεθος d-distance, με το οποίο μετρήσαμε σε ποιο βαθμό το διάνυσμα των τιμών παραγωγής \mathbf{p}^T αποκλίνει από την δευτεροβάθμια προσέγγιση του διανύσματος των τιμών παραγωγής $(\mathbf{p}^a)^T$.
- ◆ Τις ευκλείδειες γωνίες ϕ_m και τις d-distance d_m , με $m = 0, 1, 2, \dots, 5$, μεγέθη με τα οποία μετρήσαμε την ταχύτητα σύγκλισης του διανύσματος $\mathbf{v}^T \mathbf{J}^m$ προς το αριστερό Perron-Frobenius ιδιοδιάνυσμα της \mathbf{J} , το $(\mathbf{p}^*)^T$ ¹⁷.
- ◆ Τέλος, κάθε πίνακας αποτελεσμάτων περιλαμβάνει τα μεγέθη $1/\mu_i, \sigma_i, \varepsilon(\Lambda)$, τον γεωμετρικό μέσο καθώς και τους λόγους $1/\max(|\Lambda_i|)$ και $1/\min(|\Lambda_i|)$. Όπως αναπτύχθηκε στο θεωρητικό πλαίσιο η κατανομή των ιδιοτιμών επηρεάζει την ακρίβεια της προσέγγισης Bienefeld. Αυτό που στην παρούσα εργασία εξετάσαμε είναι αν κάποιο από τα παραπάνω μέτρα που έχουμε εξάγει, των οποίων η τιμή επηρεάζεται και εξαρτάται άμεσα από την κατανομή των ιδιοτιμών, συσχετίζεται ποσοτικά με τα μεγέθη τα οποία προσδιορίζουν την ακρίβεια της προσέγγισης Bienefeld, δηλαδή τα $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$ και το d-distance.

¹⁷ Επίσης, κάθε πίνακας περιλαμβάνει την ευκλείδεια γωνία ϕ και την απόσταση d , με τις οποίες μετρήσαμε την ταχύτητα σύγκλισης του διανύσματος $(\mathbf{p}^*)^T$ προς το $\mathbf{1}^T$. Τα μεγέθη αυτά υπολογίστηκαν προκειμένου να έχουμε μια εικόνα για το πόσο αποκλίνει το $(\mathbf{p}^*)^T$ από το διάνυσμα της άμεσης εργασίας, καθώς το διάνυσμα \mathbf{v}^T περιλαμβάνει τόσο την άμεση όσο και την έμμεση εργασία.

Φινλανδία 1995

R	r	ρ	d-distance
0.698612	0.322753	0.461992	0.0120138

φ	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
54.83°	36.34°	13.81°	7.04°	3.84°	2.18°	1.26°

d	d0	d1	d2	d3	d4	d5
0.838159	0.556841	0.218446	0.0987621	0.0518055	0.0292875	0.0170774

$1/\max(\Lambda_i)$	$1/\min(\Lambda_i)$	$1/\mu_i$	σ_i	$\varepsilon(\Lambda)$
1.67621	735.9	10.0276	0.124252	0.825426

Γεωμετρικός μέσος των υποδεσποζουσών
ιδιοτιμών της μήτρας J
0.0467168

Φινλανδία 2004

R	r	ρ	d-distance
0.645124	0.325051	0.503858	0.0573515

φ	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
61.23°	47.96°	35.77°	31.12°	27.315°	23.89°	20.79°

d	d0	d1	d2	d3	d4	d5
0.914663	0.729065	0.438187	0.306725	0.241129	0.198437	0.16643

$1/\max(\Lambda_i)$	$1/\min(\Lambda_i)$	$1/\mu_i$	σ_i	$\varepsilon(\Lambda)$
1.17687	2517.05	9.70933	0.140509	0.821757

Γεωμετρικός μέσος των υποδεσποζουσών
ιδιοτιμών της μήτρας J

0.047412

Σουηδία 1995

R	r	ρ	d-distance
0.858988	0.336359	0.391576	0.247068

φ	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
46.03°	27.11°	6.71°	3.01°	1.46°	0.72°	0.36°

d	d0	d1	d2	d3	d4	d5
0.764934	0.407585	0.119597	0.0493886	0.0223746	0.0106478	0.00522168

$1/\max(\Lambda_i)$	$1/\min(\Lambda_i)$	$1/\mu_i$	σ_i	$\varepsilon(\Lambda)$
1.8814	299.881	10.1936	0.116801	0.8281

Γεωμετρικός μέσος των υποδεσποζουσών
ιδιοτιμών της μήτρας J

0.050059

Σουηδία 2005

R	r	ρ	d-distance
0.806949	0.296754	0.367749	0.435885

φ	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
48.07°	27.01°	5.35°	2.13°	0.91°	0.39°	0.17°

d	d0	d1	d2	d3	d4	d5
0.922562	0.403634	0.100909	0.0337628	0.012555	0.00493871	0.00199777

$1/\max(\Lambda_i)$	$1/\min(\Lambda_i)$	$1/\mu_i$	σ_i	$\varepsilon(\Lambda)$
2.36927	1092.06	10.1224	0.100033	0.849085

Γεωμετρικός μέσος των υποδεσποζουσών
ιδιοτιμών της μήτρας J

0.0523948

Γερμανία 2000

R	r	ρ	d-distance
1.000692	0.342489	0.342252	0.0344148

φ	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
49.67°	30.87°	9.65°	4.80°	2.51°	1.34°	0.72°

d	d0	d1	d2	d3	d4	d5
0.73067	0.47238	0.186393	0.0849539	0.0442942	0.0243148	0.0135757

$1/\max(\Lambda_i)$	$1/\min(\Lambda_i)$	$1/\mu_i$	σ_i	$\varepsilon(\Lambda)$
1.75327	729.625	5.60991	0.152475	0.899935

Γεωμετρικός μέσος των υποδεσποζουσών
ιδιοτιμών της μήτρας J

0.106464

Γερμανία 2002

R	r	ρ	d-distance
1.051947	0.362079	0.344199	0.0333122

φ	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
49.59°	31.14°	9.99°	5.31°	3.03°	1.76°	1.03°

d	d0	d1	d2	d3	d4	d5
0.729216	0.485268	0.200973	0.0933174	0.0509082	0.0302593	0.0184806

$1/\max(\Lambda_i)$	$1/\min(\Lambda_i)$	$1/\mu_i$	σ_i	$\varepsilon(\Lambda)$
1.64054	158.114	5.62498	0.153212	0.900327

Γεωμετρικός μέσος των υποδεσποζουσών
ιδιοτιμών της μήτρας J

0.110864

Γαλλία 1995

R	r	ρ	d-distance
0.899382	0.322096	0.35813	0.00657399

φ	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
46.99°	28.82°	9.27°	3.90°	1.64°	0.72°	0.35°

d	d0	d1	d2	d3	d4	d5
0.781871	0.477549	0.176878	0.0720724	0.0266772	0.00975886	0.00394674

$1/\max(\Lambda_i)$	$1/\min(\Lambda_i)$	$1/\mu_i$	σ_i	$\varepsilon(\Lambda)$
1.6364	29324.4	7.60578	0.146528	0.855871

Γεωμετρικός μέσος των υποδεσποζουσών
ιδιοτιμών της μήτρας J

0.0591736

Γαλλία 2005

R	r	ρ	d-distance
0.854768	0.308133	0.360488	0.0284868

φ	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
51.72°	31.22°	11.51°	6.46°	3.83°	2.33°	1.41°

d	d0	d1	d2	d3	d4	d5
0.800513	0.483394	0.18644	0.0868566	0.0426762	0.0229299	0.013193

$1/\max(\Lambda_i)$	$1/\min(\Lambda_i)$	$1/\mu_i$	σ_i	$\varepsilon(\Lambda)$
1.70183	817.635	7.81515	0.1229	0.880323

Γεωμετρικός μέσος των υποδεσποζουσών
ιδιοτιμών της μήτρας J

0.0760763

Δανία 2000

R	r	ρ	d-distance
0.920152	0.344212	0.374082	0.32531

φ	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
47.96°	28.50°	8.33°	3.75°	1.86°	0.98°	0.52°

d	d0	d1	d2	d3	d4	d5
0.6863	0.419127	0.151149	0.0657803	0.029938	0.0143964	0.00726406

$1/\max(\Lambda_i)$	$1/\min(\Lambda_i)$	$1/\mu_i$	σ_i	$\varepsilon(\Lambda)$
1.91403	1541.75	8.45959	0.119592	0.870247

Γεωμετρικός μέσος των υποδεσποζουσών
ιδιοτιμών της μήτρας J
0.0685443

Δανία 2004

R	r	ρ	d-distance
0.866873	0.325896	0.375944	0.372498

φ	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
51.73°	33.06°	13.67°	7.64°	4.48°	2.72°	1.68°

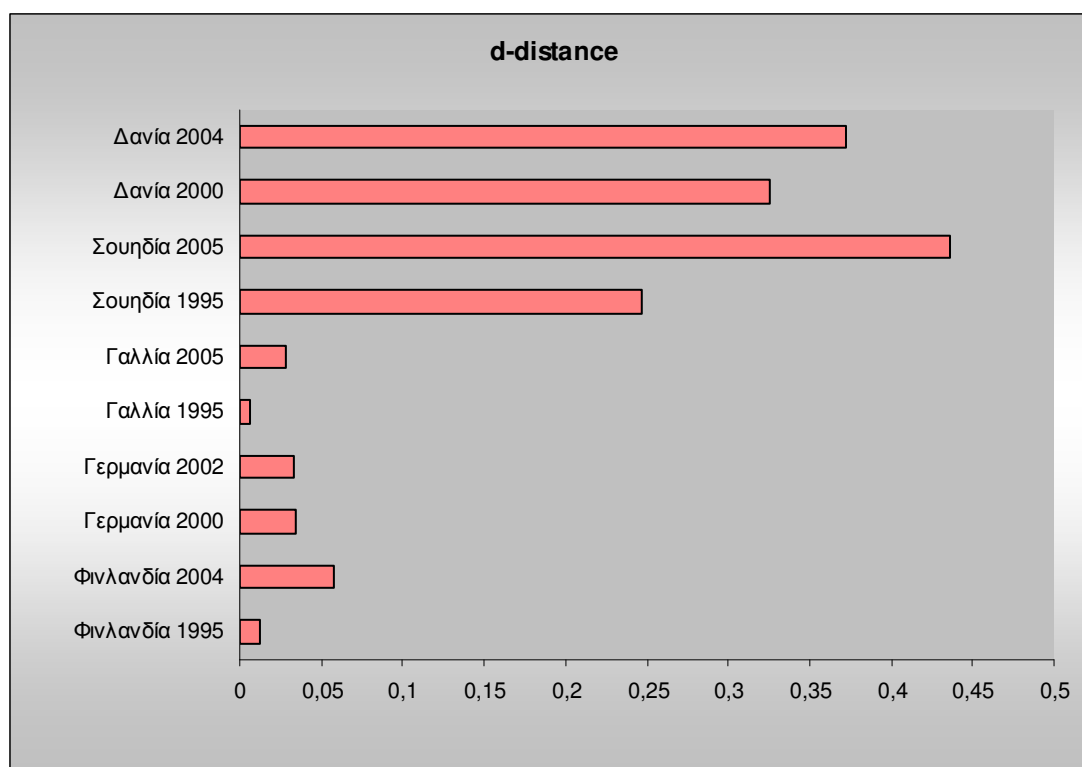
d	d0	d1	d2	d3	d4	d5
0.791685	0.501937	0.230431	0.122027	0.066943	0.0381638	0.0225155

$1/\max(\Lambda_i)$	$1/\min(\Lambda_i)$	$1/\mu_i$	σ_i	$\varepsilon(\Lambda)$
1.56767	815.37	9.24808	0.117164	0.863113

Γεωμετρικός μέσος των υποδεσποζουσών
ιδιοτιμών της μήτρας J
0.0651998

2.4 Σχολιασμός και Ερμηνεία Αποτελεσμάτων σε σχέση με την Προσέγγιση Bienefeld και την Ακρίβεια της.

Έχει παρατηρηθεί πως η δευτεροβάθμια προσέγγιση του Bienefeld προσεγγίζει αρκετά ικανοποιητικά το διάνυσμα των τιμών παραγωγής. Αυτό που με βεβαιότητα γνωρίζουμε είναι πως για τις ακραίες τιμές του σχετικού ποσοστού κέρδους, δηλαδή για $\rho = 0$ και για $\rho = 1$, η προσέγγιση είναι απολύτως ακριβής. Έτσι, για τις δυο ακραίες τιμές του ρ το μέγεθος d-distance, με το οποίο μετράμε την απόκλιση του διανύσματος των τιμών παραγωγής \mathbf{p}^T από την δευτεροβάθμια προσέγγιση $(\mathbf{p}^a)^T$, μηδενίζεται. Για οποιαδήποτε άλλη τιμή του ρ δεν μπορούμε να γνωρίζουμε *a priori* την τιμή που θα λάβει το d-distance. Στην παρούσα εργασία υπολογίσαμε για κάθε περίπτωση την δευτεροβάθμια προσέγγιση $(\mathbf{p}^a)^T$ με βάση την τιμή του ισχύοντος σχετικού ποσοστού κέρδους. Συνεπώς, και το μέγεθος d-distance που έχει υπολογισθεί μετράει την απόκλιση του \mathbf{p}^T από την δευτεροβάθμια προσέγγιση $(\mathbf{p}^a)^T$ με βάση την τιμή του ισχύοντος ρ , ήτοι με βάση την ισχύουσα κατανομή του εισοδήματος. Οι τιμές που έλαβε το d-distance για κάθε χώρα παρουσιάζονται στο παρακάτω διάγραμμα:

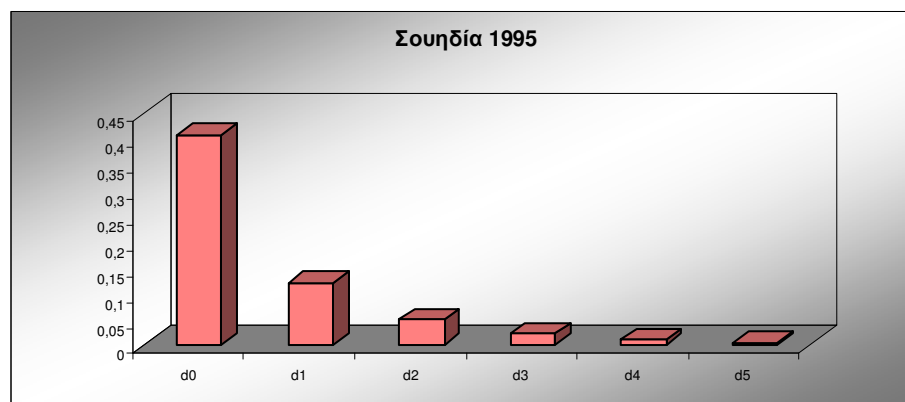
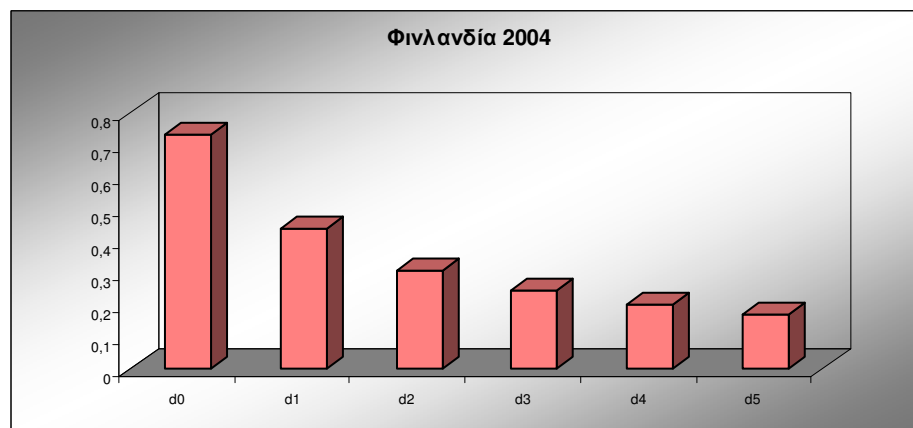
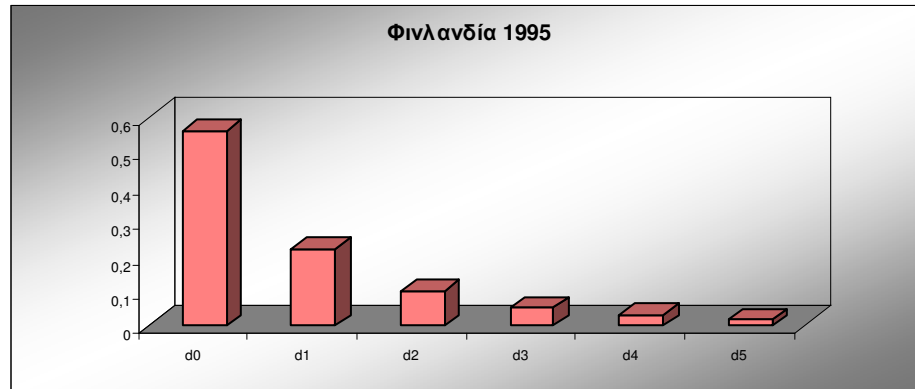


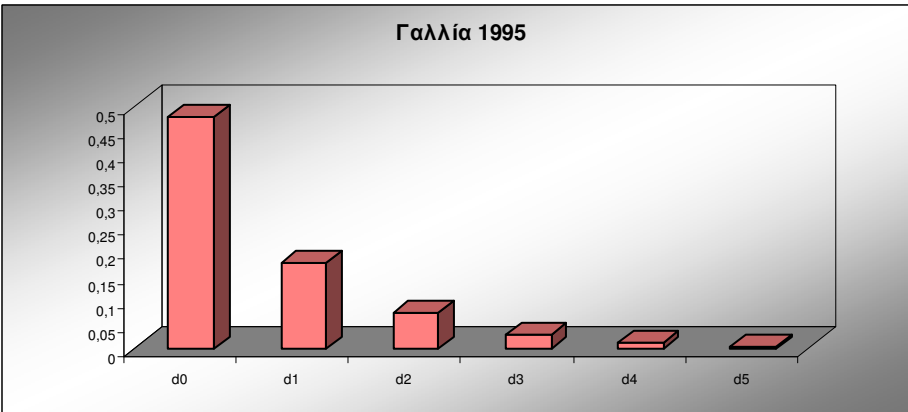
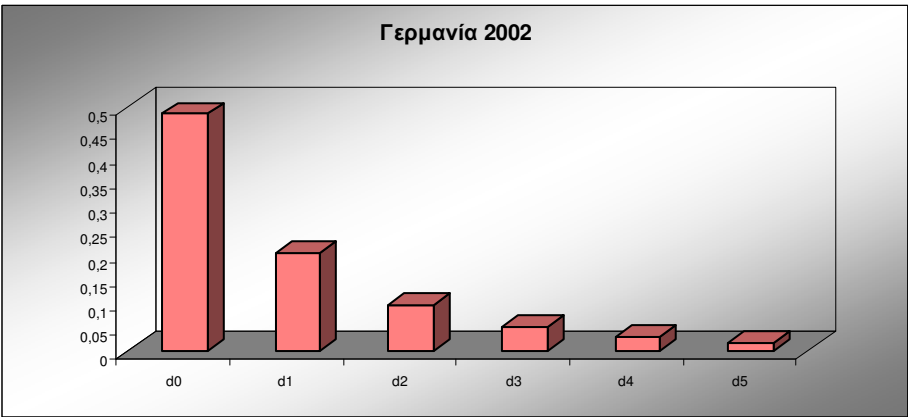
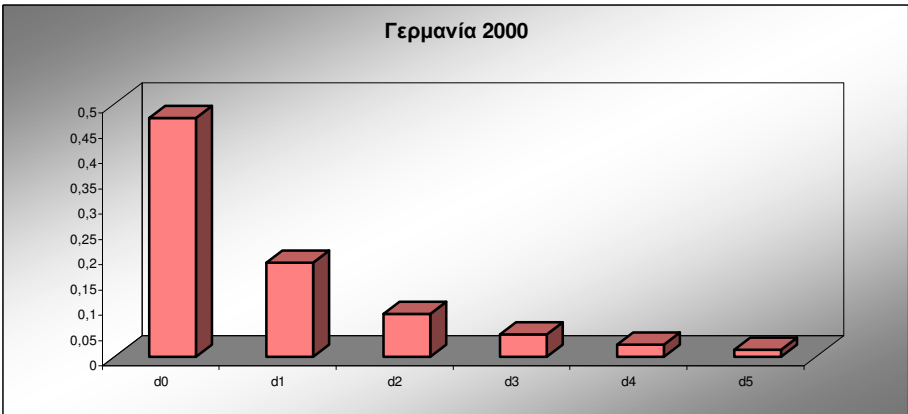
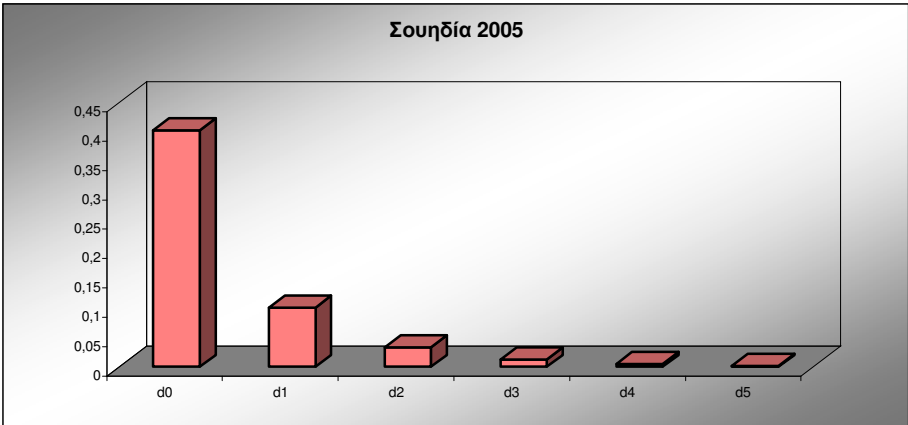
Παρατηρούμε ότι, στο μεγαλύτερο μέρος του δείγματος μας όντως το διάνυσμα των τιμών παραγωγής προσεγγίζεται αρκετά ικανοποιητικά από την δευτεροβάθμια προσέγγιση του Bienefeld. Ειδικότερα, και για τα δύο έτη της Φινλανδίας (1995 και 2004), της Γερμανίας (2000 και 2002) και της Γαλλίας (1995 και 2005) η τιμή που έλαβε το d-distance είναι εξαιρετικά χαμηλή και κατά συνέπεια η προσέγγιση είναι αρκετά ικανοποιητική. Σχετικά ικανοποιητική μπορεί να θεωρηθεί και η τιμή που έλαβε το d-distance για την Σουηδία και το έτος 1995, ενώ στις άλλες τρεις περιπτώσεις, δηλαδή της Σουηδίας για το έτος 2005 και της Δανίας για τα έτη 2000 και 2004, η δευτεροβάθμια προσέγγιση με βάση την τιμή του ισχύοντος σχετικού ποσοστού κέρδους δεν πλησιάζει ικανοποιητικά το διάνυσμα των τιμών παραγωγής και το d-distance για τις περιπτώσεις αυτές έλαβε υψηλή τιμή¹⁸.

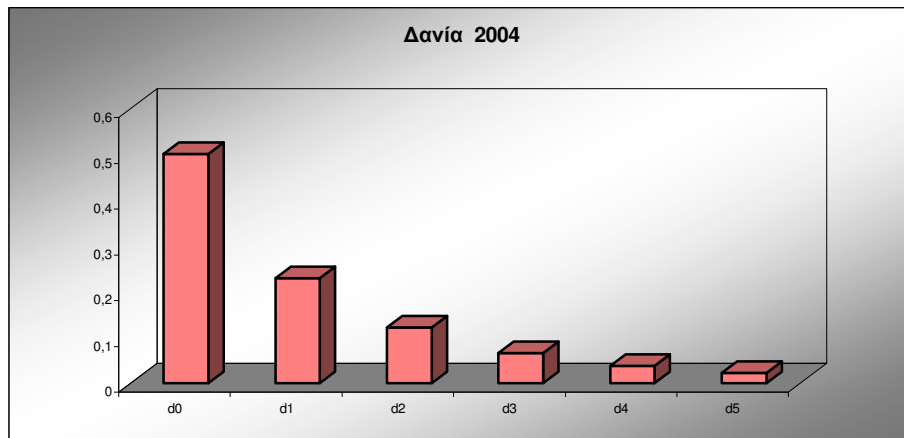
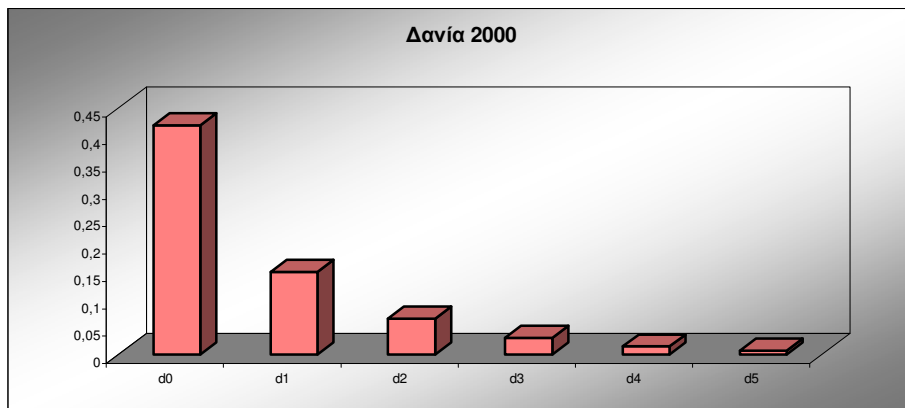
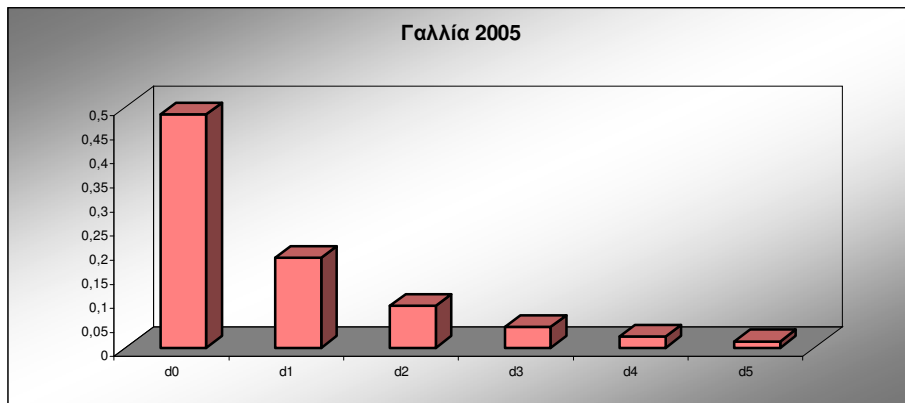
Η ακρίβεια της προσέγγισης Bienefeld εξαρτάται από την ταχύτητα σύγκλισης του διανύσματος $\mathbf{v}^T \mathbf{J}^m$ προς το $(\mathbf{p}^*)^T$. Όσο μικρότερος είναι εκείνος ο εκθέτης m για τον οποίο το διάνυσμα $\mathbf{v}^T \mathbf{J}^m$ συγκλίνει πολύ κοντά στο $(\mathbf{p}^*)^T$ τόσο πιο ακριβής θα είναι και η προσέγγιση Bienefeld με λίγους όρους του δεξιού μέλους του πολυωνύμου της σχέσης (8). Με τις ευκλείδειες γωνίες ϕ_m μετρήσαμε την απόκλιση του διανύσματος $\mathbf{v}^T \mathbf{J}^m$ από το $(\mathbf{p}^*)^T$ σε μοίρες, με $m = 0, 1, 2, \dots, 5$. Όσο πιο λίγες μοίρες είναι οι ευκλείδειες γωνίες τόσο πιο γρήγορη είναι η σύγκλιση των δύο προαναφερόμενων διανυσμάτων. Παρατηρήθηκε, όμως, ότι, οι γωνίες αυτές επηρεάζονται από τις φυσικές μονάδες μέτρησης (βλ. Steedman and Tomkins, 1998, p. 380). Αν αλλάξουν οι φυσικές μονάδες μέτρησης θα αλλάξουν και οι τιμές που λαμβάνουν οι ευκλείδειες γωνίες. Έτσι, απαιτήθηκε ένα μέτρο απόκλισης των δύο διανυσμάτων ανεξάρτητο από τις φυσικές μονάδες μέτρησης και περισσότερο αξιόπιστο. Το μέτρο αυτό είναι η απόσταση d-distance των δύο διανυσμάτων.

¹⁸ Λόγω των συναθροίσεων που πραγματοποιήθηκαν τα διανύσματα που προέκυψαν για κάθε χώρα δεν είναι ίσων διαστάσεων. Όταν θέλουμε να συγκρίνουμε τα d-distance που προκύπτουν από διαφορετικών διαστάσεων διανύσματα, το απολύτως σωστό είναι να συγκρίνουμε τα λεγόμενα 'normalized d-distance', δηλαδή τον λόγο του d-distance προς την θεωρητικά μέγιστη τιμή του, D. Κάθε d-distance έχει μία μέγιστη τιμή η οποία εξαρτάται από τις διαστάσεις των υπό σύγκριση διανυσμάτων, δηλαδή εάν τα υπό σύγκριση διανύσματα είναι διαστάσεων $1 \times n$, τότε η μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα, $\cos\theta$, είναι $1/\sqrt{n}$. Επομένως, η θεωρητικά μέγιστη τιμή του d-distance, D, ισούται με $\sqrt{2[1 - (1/\sqrt{n})]}$. Παρόλα αυτά, στη δική μας περίπτωση, τα παραπάνω δεν παίζουν ιδιαίτερο λόγο, διότι τα D δεν διαφέρουν πολύ στους πίνακες μας, π.χ. ο 58×58 πίνακας δίνει D ίσο με 1.318, ενώ ο 51×51 δίνει 1.311 (βλ. Mariolis and Soklis, 2009).

Συνεπώς, υπολογίστηκαν και οι αποστάσεις d- distance ανάμεσα στα $(\mathbf{p}^*)^T$ και $\mathbf{v}^T \mathbf{J}^m$, με $m=0,1,2,\dots,5$, τις οποίες συμβολίσαμε με d_m . Οι τιμές που έλαβαν οι αποστάσεις d_m για κάθε χώρα παρουσιάζονται διαγραμματικά παρακάτω:







Είναι εμφανές από τα διαγράμματα ότι, όσο αυξάνεται ο εκθέτης m από 0 σε 5 τόσο η απόσταση d ανάμεσα στα διανύσματα $\mathbf{v}^T \mathbf{J}^m$ και $(\mathbf{p}^*)^T$ μειώνεται. Όμως, σε όλες σχεδόν τις περιπτώσεις (με εξαίρεση της Φινλανδίας για το έτος 2004), η τιμή που λαμβάνει το μέγεθος d_5 , με το οποίο μετρήσαμε την ταχύτητα σύγκλισης του διανύσματος $\mathbf{v}^T \mathbf{J}^5$ προς το $(\mathbf{p}^*)^T$, είναι αρκετά χαμηλή. Για $m=5$ το διάνυσμα $\mathbf{v}^T \mathbf{J}^5$ συγκλίνει πολύ κοντά στο $(\mathbf{p}^*)^T$. Επομένως, αφού για $m=5$ το διάνυσμα $\mathbf{v}^T \mathbf{J}^m$

αποκλίνει ελάχιστα από το $(\mathbf{p}^*)^T$, τόσο περισσότερο ακριβής θα είναι η προσέγγιση των τιμών παραγωγής μέσω ενός πολυωνύμου χαμηλής τάξης. Με λίγους όρους του δεξιού αναπτύγματος της σχέσης (8) θα λάβουμε ικανοποιητική προσέγγιση, δηλαδή λίγοι όροι του πολυωνύμου απαιτούνται για μία ικανοποιητική σύγκλιση.

2.5 Οι Συσχετίσεις που πραγματοποιήθηκαν και ο Σχολιασμός των Αποτελεσμάτων τους

Η κατανομή των ιδιοτιμών επηρεάζει την ταχύτητα σύγκλισης του διανύσματος $\mathbf{v}^T \mathbf{J}^m$ προς το $(\mathbf{p}^*)^T$, η οποία, με την σειρά της, καθορίζει την ακρίβεια της προσέγγισης Bienenfeld. Για την ακρίβεια το ύψος των λόγων $\Lambda^* / |\Lambda_i| = 1/|\Lambda_i|$ επηρεάζει θετικά την ταχύτητα αυτή. Όσο μεγαλύτερη (κατά μέτρο) είναι η Perron – Frobenius ιδιοτιμή της μήτρας \mathbf{J} από τις υπόλοιπες ιδιοτιμές αυτής τόσο μεγαλύτεροι θα είναι οι λόγοι $1/|\Lambda_i|$ και κατά συνέπεια τόσο πιο ακριβής θα είναι η πολυωνυμική προσέγγιση. Κατά την διάρκεια της εμπειρικής μας μελέτης υπολογίσθηκαν τα μεγέθη $1/\mu_i$, σ_i , $\varepsilon(\Lambda)$, ο γεωμετρικός μέσος καθώς και οι λόγοι $1/\max(|\Lambda_i|)$ και $1/\min(|\Lambda_i|)$, μεγέθη τα οποία θα μπορούσαμε να πούμε πως μας δίνουν μια εικόνα σχετικά με το πώς κατανέμονται οι ιδιοτιμές. Οι τιμές που λαμβάνουν τα μεγέθη σ_i , $\varepsilon(\Lambda)$, $1/\mu_i$ και ο γεωμετρικός μέσος εξαρτώνται άμεσα από την κατανομή των ιδιοτιμών, αφού πρόκειται για στατιστικά μέτρα με την βοήθεια των οποίων μετράμε την διασπορά των ιδιοτιμών, την ομοιότητα των ιδιοτιμών και την μέση τιμή γύρω από την οποία κινούνται. Το ίδιο ισχύει και για τους λόγους $1/\max(|\Lambda_i|)$ και $1/\min(|\Lambda_i|)$.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να εξετάσουμε την ύπαρξη ή μη άμεσων ποσοτικών συσχετίσεων ανάμεσα στα προαναφερόμενα μεγέθη και στα μεγέθη τα οποία προσδιορίζουν την ακρίβεια της προσέγγισης Bienenfeld, δηλαδή στα d_0 , d_1 , d_2 , d_3 , d_4 , d_5 και στο d-distance. Με λίγα λόγια, αυτό που εξετάσαμε είναι αν κάποιο από τα μεγέθη, η τιμή των οποίων επηρεάζεται από την κατανομή των ιδιοτιμών, θα μπορούσε να μας δώσει κάποια πληροφορία σε σχέση με την ταχύτητα σύγκλισης της προσέγγισης. Για παράδειγμα, έστω ότι λαμβάνουμε τον λόγο $1/\max(|\Lambda_i|)$. Αφού οι λόγοι $1/|\Lambda_i|$ επηρεάζουν θετικά την ταχύτητα σύγκλισης, όσο μεγαλύτερος είναι ο λόγος $1/\max(|\Lambda_i|)$ τόσο γρηγορότερη θα είναι η σύγκλιση, άρα τόσο μικρότερη τιμή θα λάβουν τα μεγέθη d_0 , d_1 , d_2 , d_3 , d_4 , d_5 και το d-distance. Έτσι, αναμένουμε αρνητική συσχέτιση μεταξύ του μεγέθους $1/\max(|\Lambda_i|)$ και των d_0 , d_1 , d_2 , d_3 , d_4 , d_5 , d-distance. Ελέγχθηκε, λοιπόν, αν ο συντελεστής R^2 ανάμεσα

στο μέγεθος $1/\max(|\Lambda_i|)$ και στα $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$, d-distance είναι υψηλός και αν η αρνητική συσχέτιση που κανείς αναμένει παρουσιάζεται. Ομοίως πράξαμε και για τα υπόλοιπα μεγέθη.

Δεν πρέπει, βέβαια, να ξεχνάμε ότι η ταχύτητα σύγκλισης επηρεάζεται από την κατανομή όλων των ιδιοτιμών. Επομένως, η σκέψη για παράδειγμα ότι, η χώρα με το μεγαλύτερο λόγο $1/\max(|\Lambda_i|)$ θα πρέπει κατανάγκην να έχει και την γρηγορότερη σύγκλιση, ήτοι τα $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$, d-distance με τις χαμηλότερες τιμές, είναι λανθασμένη. Η κατανομή όλων των ιδιοτιμών επηρεάζει την ταχύτητα σύγκλισης και όχι μόνο η μεγαλύτερη ή η μικρότερη υποδεσπόζουσα ιδιοτιμή. Τα μεγέθη $1/\mu_i, \sigma_i, \varepsilon(\Lambda)$ και ο γεωμετρικός μέσος εκφράζουν όλες αυτές τις ιδιοτιμές με έναν, και μοναδικό, αριθμό, ενώ οι λόγοι $1/\max(|\Lambda_i|)$ και $1/\min(|\Lambda_i|)$ σχετίζονται μόνο με την μεγαλύτερη και την μικρότερη υποδεσπόζουσα ιδιοτιμή, πράγμα που συνεπάγεται πως πρέπει να είμαστε ιδιαίτερος προσεκτικοί στα συμπεράσματά μας.

Ο έλεγχος για την μορφή της συσχέτισης (θετική/αρνητική) ανάμεσα στα μεγέθη $1/\max(|\Lambda_i|), 1/\min(|\Lambda_i|), 1/\mu_i, \sigma_i, \varepsilon(\Lambda)$, τον γεωμετρικό μέσο και στα $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$, d-distance πραγματοποιήθηκε σε δυο στάδια. Στο πρώτο στάδιο εξετάσαμε αν με την βοήθεια διαγραμμάτων μπορούμε να εξάγουμε κάποιο συμπέρασμα σχετικά με το πως καθένα από τα παραπάνω στατιστικά μέτρα και τους λόγους $1/\max(|\Lambda_i|)$ και $1/\min(|\Lambda_i|)$ μπορεί να συνδέεται με τα $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$ και τα d-distance. Για καθένα, λοιπόν, από τα παραπάνω μέτρα και τους λόγους $1/\max(|\Lambda_i|)$ και $1/\min(|\Lambda_i|)$ κατασκευάστηκαν επτά διαγράμματα ¹⁹. Στο πρώτο διάγραμμα κάθε μεγέθους τοποθετήσαμε σε ζεύγη τις τιμές που έλαβαν τα d_0 , από τις δέκα περιπτώσεις χωρών που εξετάσαμε, με τις τιμές που έλαβε το αντίστοιχο μέγεθος για κάθε περίπτωση. Αντίστοιχα, στο δεύτερο διάγραμμα κάθε μεγέθους τοποθετήσαμε σε ζεύγη τις δέκα τιμές που έλαβαν τα d_1 με τις τιμές και πάλι του αντίστοιχου μεγέθους για κάθε περίπτωση. Η διαδικασία αυτή επαναλήφθηκε και για τα υπόλοιπα μεγέθη d_2, d_3, d_4, d_5 καθώς και για τα d-distance. Έτσι για κάθε

¹⁹ Τα διαγράμματα κατασκευάστηκαν μέσω του προγράμματος “Mathematica” και παρατίθενται στο παράρτημα.

μέτρο καθώς και για τους λόγους $1/\max(|\Lambda_i|)$ και $1/\min(|\Lambda_i|)$ προέκυψαν επτά διαγράμματα δέκα σημείων. Στον κάθετο άξονα κάθε διαγράμματος εμφανίζονται οι τιμές για τα $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d\text{-distance}$, ενώ οι τιμές για τα $1/\max(|\Lambda_i|), 1/\min(|\Lambda_i|), 1/\mu_i, \sigma_i, \varepsilon(\Lambda)$ και τον γεωμετρικό μέσο εμφανίζονται στον οριζόντιο άξονα. Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε ότι, θεωρήσαμε σκόπιμο να εξετάσουμε και την ύπαρξη ή μη συσχέτισης ανάμεσα στο μέγεθος d-distance και στο σχετικό ποσοστό κέρδους ρ . Έτσι, κατασκευάσαμε ένα επιπλέον διάγραμμα στον κάθετο άξονα του οποίου μετρήσαμε τις δέκα τιμές που έλαβαν τα d-distance και στον οριζόντιο άξονα τις τιμές του σχετικού ποσοστού κέρδους ρ .

Από το πρώτο στάδιο ελέγχου, όμως, δεν καταφέραμε να εξάγουμε κάποιο συμπέρασμα, αφού τα διαγράμματα δεν μας έδωσαν σαφή εικόνα για την σχέση κάθε μέτρου και των λόγων με τα $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$ και τα d-distance. Έτσι ακολούθησε το δεύτερο στάδιο ελέγχου όπου πραγματοποιήθηκαν οι απαραίτητες παλινδρομήσεις, ώστε να ελεγχθεί αν η συσχέτιση ανάμεσα στα προαναφερόμενα μεγέθη είναι ισχυρή, ήτοι αν ο συντελεστής συσχέτισης R^2 είναι υψηλός. Είναι αυτονόητο πως παλινδρομήσεις πραγματοποιήθηκαν ανάμεσα σε κάθε μέγεθος $1/\max(|\Lambda_i|), 1/\min(|\Lambda_i|), 1/\mu_i, \sigma_i, \varepsilon(\Lambda)$, τον γεωμετρικό μέσο και σε καθένα από τα μεγέθη $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d\text{-distance}$. Επίσης, μια επιπλέον παλινδρόμηση πραγματοποιήθηκε ανάμεσα στο σχετικό ποσοστό κέρδους ρ και στα d-distance. Το ρόλο της εξαρτημένης μεταβλητής σε κάθε παλινδρόμηση έπαιξαν οι αποστάσεις d_m και d-distance και της ανεξάρτητης μεταβλητής τα $1/\max(|\Lambda_i|), 1/\min(|\Lambda_i|), 1/\mu_i, \sigma_i, \varepsilon(\Lambda)$ και ο γεωμετρικός μέσος. Αρχικά, για τις παλινδρομήσεις που πραγματοποιήθηκαν λάβαμε ως δείγμα και τις δέκα παρατηρήσεις των συσχετιζόμενων μεγεθών. Αποδείχθηκε, όμως, πως η συσχέτιση ανάμεσα στις δέκα παρατηρήσεις των εν λόγω μεγεθών δεν είναι υψηλή²⁰.

²⁰ Πιο συγκεκριμένα, σε σχέση με τα $d_0 \dots d_5$:έχοντας λάβει ως δείγμα και τις 10 παρατηρήσεις το R^2 έλαβε σχετικά “καλές ” τιμές μόνο στην περίπτωση που εξετάσαμε την σχέση μεταξύ του μεγέθους $1/\max(|\Lambda_i|)$ και των μεγεθών $d_0 \dots d_5$, με το R^2 να κυμαίνεται από 0.50 έως 0.76. Σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις το R^2 ήταν πολύ χαμηλό με την τιμή του να μην ξεπερνάει το 0.17. Σε σχέση με τα d-distance: έχοντας λάβει ως δείγμα τις 10 παρατηρήσεις για να ελεγχθεί η συσχέτιση ανάμεσα στα d-distance και στα υπόλοιπα μεγέθη το R^2 λαμβάνει τιμές από 0.02 έως 0.62.

Παρόλα αυτά η μελέτη μας δεν σταμάτησε στο σημείο αυτό. Στη συνέχεια, για κάθε περίπτωση, προσπαθήσαμε, παρατηρώντας το σχήμα, να διαπιστώσουμε αν κάποια σημεία από το συνολικό δείγμα των δέκα παρατηρήσεων θα μπορούσαν να συνδέονται γραμμικά ή ακόμα και λογαριθμικά μεταξύ τους. Για τα σημεία που παρατηρήσαμε πως θα μπορούσαν να συνδέονται εξετάσαμε αν παρουσιάζουν ισχυρή συσχέτιση, αν δηλαδή το R^2 είναι υψηλό. Σε σχέση, όμως με τα μεγέθη $1/\mu_i$, σ_i , $\varepsilon(\Lambda)$ και τον γεωμετρικό μέσο διαπιστώθηκε ότι, σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις πέντε παρατηρήσεις που αφορούν σε συγκεκριμένες οικονομίες, δηλαδή της Σουηδίας (για τα έτη 1995 και 2005), της Δανίας (για το έτος 2000) και της Γερμανίας (για τα έτη 2000 και 2002), εμφανίζονται σχεδόν πάντα σε κάθε παλινδρόμηση. Γι' αυτό το λόγο επιχειρήσαμε για κάθε περίπτωση να δούμε και την συσχέτιση ανάμεσα μόνο σε αυτές τις πέντε παρατηρήσεις. Επίσης, πέρα από τις προαναφερόμενες πέντε παρατηρήσεις πολύ συχνά εμφανίζονται και οι παρατηρήσεις που αφορούν στην Γαλλία (για τα έτη 1995 και 2005). Έτσι, επιχειρήσαμε να δούμε σε κάθε περίπτωση και την συσχέτιση ανάμεσα στις επτά παρατηρήσεις (δηλαδή στις πέντε παρατηρήσεις των χωρών που αναφέρονται παραπάνω και στις δυο παρατηρήσεις που αφορούν την Γαλλία). Στο κείμενο που ακολουθεί παραθέτουμε τις παρατηρήσεις μας, αρχικά, σε σχέση με τα μεγέθη $1/\max(|\Lambda_i|)$, $1/\min(|\Lambda_i|)$, $1/\mu_i$, σ_i , $\varepsilon(\Lambda)$, τον γεωμετρικό μέσο και τα d_0 , d_1 , d_2 , d_3 , d_4 , d_5 και έπειτα, σε σχέση με τα μεγέθη $1/\max(|\Lambda_i|)$, $1/\min(|\Lambda_i|)$, $1/\mu_i$, σ_i , $\varepsilon(\Lambda)$, τον γεωμετρικό μέσο και τα d-distance.

Σε σχέση με τα μεγέθη $1/\max(|\Lambda_i|)$, $1/\min(|\Lambda_i|)$, $1/\mu_i$, σ_i , $\varepsilon(\Lambda)$, τον γεωμετρικό μέσο και τα d_0 , d_1 , d_2 , d_3 , d_4 , d_5 παρατηρήθηκαν τα εξής:

❖ Για το μέτρο $1/\mu_i$ και τα d_0 , d_1 , d_2 , d_3 , d_4 , d_5 :

Η συσχέτιση σε όλες τις περιπτώσεις έχοντας λάβει ως δείγμα τις πέντε παρατηρήσεις που προαναφέρθηκαν είναι πολύ “υψηλή”. Το R^2 λαμβάνει τιμές από 0.89 έως 0.96 και η κλίση της γραμμής της «γραμμικής παλινδρόμησης» είναι πάντα αρνητική, όπως θεωρητικά αναμένεται. Αν λάβουμε υπόψιν μας και τις άλλες δυο παρατηρήσεις που προαναφέραμε (της Γαλλίας για τα έτη 1995 και 2005) και το δείγμα αυξηθεί στις επτά παρατηρήσεις, η συσχέτιση μειώνεται, παραμένει όμως αρκετά “υψηλή”. Το R^2 λαμβάνει τιμές από 0.68 έως 0.84 και η κλίση της γραμμής της «γραμμικής

παλινδρόμησης» παραμένει αρνητική . Τέλος, πρέπει να αναφέρουμε πως σε ορισμένες περιπτώσεις αν λάβουμε τις πέντε παρατηρήσεις που προαναφέραμε και προσθέσουμε μόνο τις παρατηρήσεις που αφορούν στο ένα έτος της Γαλλίας (και όχι και στα 2 έτη), η συσχέτιση είναι και πάλι “υψηλή”: π.χ. για το d_1 και το $1/\mu_i$ έχοντας λάβει τις πέντε παρατηρήσεις και τις τιμές για το έτος 1995 της Γαλλίας προκύπτει $R^2=0.92$ (χαμηλότερο από το R^2 που δίνουν οι πέντε παρατηρήσεις και υψηλότερο από το R^2 που δίνουν οι επτά παρατηρήσεις) ή για το d_4 και το $1/\mu_i$ έχοντας λάβει τις πέντε παρατηρήσεις και τις τιμές για το έτος 2005 της Γαλλίας προκύπτει $R^2=0.87$ (χαμηλότερο από το R^2 που δίνουν οι πέντε παρατηρήσεις και υψηλότερο από το R^2 που δίνουν οι επτά παρατηρήσεις).

- ❖ Για τον γεωμετρικό μέσο και τα $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$:

Έχοντας λάβει ως δείγμα τις πέντε παρατηρήσεις που προαναφέραμε η συσχέτιση σε όλες τις περιπτώσεις είναι πολύ “υψηλή”. Το εύρος μέσα στο οποίο κυμαίνεται το R^2 είναι από 0.90 έως 0.98 και η κλίση της γραμμής της «γραμμικής παλινδρόμησης» είναι πάντα θετική, όπως θεωρητικά αναμένεται. Αυξάνοντας το δείγμα στις επτά παρατηρήσεις, δηλαδή προσθέτοντας τις παρατηρήσεις για τα δυο έτη της Γαλλίας, παρατηρείται το εξής: για τα d_3, d_4, d_5 η συσχέτιση παραμένει “υψηλή” με το R^2 να ισούται με 0.83, 0.86 και 0.85 αντίστοιχα. Για το d_0 λαμβάνουμε $R^2=0.47$ και για τα d_1, d_2 λαμβάνουμε R^2 που ισούται με 0.63 και 0.68 αντίστοιχα. Σε όλες τις περιπτώσεις, η κλίση της γραμμής της «γραμμικής παλινδρόμησης» παραμένει θετική. Επίσης, αυτό που παρατηρήθηκε είναι πως για τα μεγέθη d_3, d_4, d_5 και τον γεωμετρικό μέσο, αν λάβουμε τις τιμές των πέντε παρατηρήσεων και προσθέσουμε μόνο τις τιμές που αντιστοιχούν στο έτος 1995 της Γαλλίας η συσχέτιση είναι και πάλι αρκετά “υψηλή” με το R^2 να λαμβάνει τις τιμές 0.91, 0.93 και 0.92 αντίστοιχα.

- ❖ Για το μέτρο σ_i και τα $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$:

Σε όλες τις περιπτώσεις έχοντας λάβει ως δείγμα τις πέντε παρατηρήσεις η συσχέτιση είναι πολύ υψηλή, το R^2 παίρνει τιμές από 0.93 έως 0.96 και η κλίση της γραμμής της «γραμμικής παλινδρόμησης» είναι πάντα θετική. Στη

συνέχεια παρατηρήθηκε το εξής: σε όλες τις περιπτώσεις αν αυξήσουμε το δείγμα από πέντε στις έξι παρατηρήσεις (προσθέτοντας τις τιμές για το έτος 1995 της Γαλλίας στα d_0, d_1, d_2 και τις τιμές για το έτος 2005 της Γαλλίας στα d_3, d_4, d_5) η συσχέτιση παραμένει αρκετά “υψηλή” με το R^2 να κυμαίνεται από 0.81 έως 0.94 και η κλίση της γραμμής της «γραμμικής παλινδρόμησης» εξακολουθεί να είναι θετική. Τέλος, αν το δείγμα αυξηθεί στις επτά παρατηρήσεις, με τις τιμές και για τα δυο έτη της Γαλλίας, για τα d_0, d_1, d_2 το R^2 ισούται με 0.67, 0.74 και 0.67 αντίστοιχα, ενώ για τα d_3, d_4, d_5 το R^2 λαμβάνει τις τιμές 0.57, 0.47 και 0.42 αντίστοιχα.

- ❖ Για το μέτρο $\varepsilon(\Lambda)$ και τα $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$:

Έχοντας λάβει ως δείγμα τις πέντε παρατηρήσεις η συσχέτιση σε όλες τις περιπτώσεις είναι αρκετά “υψηλή”, το R^2 λαμβάνει τιμές από 0.75 έως 0.84 και η κλίση της γραμμής της «γραμμικής παλινδρόμησης» είναι πάντα θετική, όπως θεωρητικά αναμένεται. Αν λάβουμε υπόψιν και τις τιμές για τα δυο έτη της Γαλλίας και το δείγμα μας αυξηθεί στις επτά παρατηρήσεις, τότε για το d_0 η συσχέτιση είναι “χαμηλή” με $R^2=0.53$, ενώ για τα υπόλοιπα μεγέθη το R^2 κυμαίνεται από 0.68 έως 0.78 και η κλίση της γραμμής της «γραμμικής παλινδρόμησης» παραμένει σε όλες τις περιπτώσεις θετική.

- ❖ Για τον λόγο $1/\max(|\Lambda_i|)$ και τα $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$:

Για το μέγεθος d_0 παρατηρήθηκε “ισχυρή” συσχέτιση έχοντας λάβει ως δείγμα τις παρατηρήσεις των εξής χωρών: Δανίας 2000 και 2004, Γερμανίας 2000 και 2002 και Γαλλίας 2005, με $R^2=0.94$. Για τις υπόλοιπες περιπτώσεις η συσχέτιση είναι πολύ “υψηλή” έχοντας λάβει ως δείγμα τις παρατηρήσεις των εξής χωρών: Δανίας 2000 και 2004, Γερμανίας 2000 και 2002, Γαλλίας 2005, Σουηδίας 1995 και της Φινλανδίας 1995, με R^2 να κυμαίνεται από 0.85 έως 0.94. Σε όλες τις περιπτώσεις η κλίση της γραμμής της «γραμμικής παλινδρόμησης» είναι αρνητική, όπως θεωρητικά αναμένεται. Επίσης παρατηρήθηκε πως αν και στο d_0 προσθέσουμε τις δυο παρατηρήσεις που προσθέσαμε και στις υπόλοιπες περιπτώσεις, δηλαδή της Σουηδίας 1995 και

της Φινλανδίας 1995, τότε το R^2 λαμβάνει την τιμή 0.64, μειώνεται αρκετά, παρ' όλα αυτά και αυτή η συσχέτιση δεν θεωρείται "χαμηλή" ²¹.

- ❖ Για τον λόγο $1/\min(|\Lambda_i|)$ και τα $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$:

Στην περίπτωση αυτή καμία συσχέτιση από αυτές που πραγματοποιήσαμε δεν είναι αξιόλογη. Έχοντας λάβει ως δείγμα τις πέντε παρατηρήσεις που εμφανίζονται πιο συχνά η συσχέτιση είναι πολύ "χαμηλή". Το εύρος μέσα στο οποίο κυμαίνεται το R^2 είναι από 0.12 έως 0.26. Η κλίση της γραμμής της «γραμμικής παλινδρόμησης» εμφανίζεται να είναι αρνητική. Αυξάνοντας το δείγμα στις 7 παρατηρήσεις το R^2 κυμαίνεται από 0.001 έως 0.15 και η κλίση της γραμμής της «γραμμικής παλινδρόμησης» δεν είναι πάντα ίδια. Τέλος, παρατηρήθηκε πως ίσως το μέγεθος $1/\min(|\Lambda_i|)$ να συνδέεται με τα μεγέθη $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$ λογαριθμικά. Το δείγμα που λάβαμε για να εξετάσουμε την περίπτωση αυτή αφορά τις παρατηρήσεις των εξής χωρών: της Φινλανδίας 1995, της Γερμανίας 2000, της Γαλλίας 2005, της Δανίας 2000 και 2004. Το R^2 κυμαίνεται από 0.51 έως 0.67 και η κλίση της γραμμής της «λογαριθμικής παλινδρόμησης» είναι πάντα αρνητική. Και σε αυτή την περίπτωση το αποτέλεσμα δεν θεωρείται ικανοποιητικό, είναι, όμως, πολύ καλύτερο από τις 2 προηγούμενες περιπτώσεις, γι' αυτό και το αναφέρουμε.

Σε σχέση με τα μεγέθη $1/\max(|\Lambda_i|)$, $1/\min(|\Lambda_i|)$, $1/\mu_i$, σ_i , $\varepsilon(\Lambda)$, τον γεωμετρικό μέσο και το μέγεθος d-distance οι περισσότερες παλινδρομήσεις που έγιναν δεν έδωσαν κάποιο ενδιαφέρον αποτέλεσμα. Τέσσερις περιπτώσεις αξίζει να σημειώσουμε και είναι οι ακόλουθες:

- ❖ Για το σχετικό ποσοστό κέρδους του συστήματος ρ και τα d-distance:

Ότι γραμμική παλινδρόμηση και αν έγινε έδωσε χαμηλό R^2 . Υψηλή συσχέτιση λάβαμε όταν συνδέσαμε λογαριθμικά τις παρατηρήσεις των εξής χωρών : της Σουηδίας 2005 και 1995, της Δανίας 2000 και 2004 και της Φινλανδίας 2004, με

²¹ Σε σχέση με τις πέντε παρατηρήσεις που εμφανίζονται σχεδόν πάντα στα υπόλοιπα μεγέθη ($1/\mu_i$, σ_i , $\varepsilon(\Lambda)$ και τον γεωμετρικό μέσο), η συσχέτιση για το $1/\max(|\Lambda_i|)$ και αυτές μας δίνει R^2 που κυμαίνεται από 0.60 έως 0.81 και η κλίση της γραμμής της «γραμμικής παλινδρόμησης» παραμένει πάντα αρνητική, ενώ αυξάνοντας το δείγμα στις επτά παρατηρήσεις με τις τιμές των δύο ετών της Γαλλίας, στις περιπτώσεις d_0, d_1, d_2 το R^2 ισούται με 0.68, 0.77 και 0.76 αντίστοιχα, ενώ στις περιπτώσεις d_3, d_4, d_5 το R^2 λαμβάνει τις τιμές 0.58, 0.44 και 0.39 αντίστοιχα.

$R^2=0.99$. Η κλίση της γραμμής της «λογαριθμικής παλινδρόμησης» είναι αρνητική. Προσθέτοντας στις παραπάνω πέντε παρατηρήσεις τις παρατηρήσεις που αφορούν στο έτος 1995 της Φινλανδίας το R^2 μειώνεται αρκετά και λαμβάνει την τιμή 0.71.

- ❖ Για τον γεωμετρικό μέσο και τα d-distance:

Παρατηρήσαμε πως θα μπορούσαν να συνδέονται γραμμικά οι εξής παρατηρήσεις: της Φινλανδίας 1995, της Γαλλίας 1995 και 2005 και της Γερμανίας 2000 και 2002, με $R^2 = 0.81$. Η κλίση της γραμμής της «γραμμικής παλινδρόμησης» που προκύπτει είναι θετική.

- ❖ Για το μέτρο $\varepsilon(\Lambda)$ και τα d-distance :

Και εδώ γραμμικά θα μπορούσαν να συνδέονται οι παρατηρήσεις που αναφέρθηκαν για την ακριβώς παραπάνω περίπτωση (γεωμετρικού μέσου – d-distance). Το R^2 που προκύπτει είναι 0.77 και η κλίση της γραμμής της «γραμμικής παλινδρόμησης» είναι θετική.

- ❖ Για τον λόγο $1/\min(|\Lambda_i|)$ και τα d-distance:

Παρατηρήσαμε πως θα μπορούσαν να συνδέονται λογαριθμικά οι εξής παρατηρήσεις: της Σουηδίας 2005, της Δανίας 2000 και 2004, της Φινλανδίας 2004 και της Γαλλίας 1995, με $R^2=0.93$. Η κλίση της γραμμής της «λογαριθμικής παλινδρόμησης» είναι αρνητική. Αν στις προαναφερόμενες παρατηρήσεις προσθέσουμε και τις παρατηρήσεις που αφορούν στο έτος 1995 της Σουηδίας το R^2 μειώνεται και λαμβάνει την τιμή 0.80²².

²² Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφέρουμε ότι εξετάσαμε και την συσχέτιση ανάμεσα στο d-distance και στα μεγέθη $1/\max(|\Lambda_i|)$, $1/\min(|\Lambda_i|)$, $1/\mu_i$, σ_i , $\varepsilon(\Lambda)$ και τον γεωμετρικό μέσο με δείγμα τις πέντε παρατηρήσεις που εμφανίζονται πιο συχνά στις συσχετίσεις ανάμεσα στα $d_0 \dots d_5$ και στα $1/\mu_i$, σ_i , $\varepsilon(\Lambda)$ και τον γεωμετρικό μέσο, ώστε να ελέγξουμε αν και σε αυτή την περίπτωση το συγκεκριμένο δείγμα παρατηρήσεων δίνει ισχυρές συσχετίσεις. Από τα αποτελέσματα που προέκυψαν διαπιστώσαμε ότι σε τέσσερις περιπτώσεις λαμβάνουμε ‘‘υψηλό’’ R^2 . Σε καμία, όμως, από τις τέσσερις αυτές περιπτώσεις δεν λαμβάνουμε την μορφή της συσχέτισης που θεωρητικά αναμένεται. Πιο συγκεκριμένα ‘‘υψηλό’’ R^2 προκύπτει στις εξής περιπτώσεις: α) στη συσχέτιση ανάμεσα στο d-distance και στον γεωμετρικό μέσο με $R^2 = 0.80$. Η κλίση της γραμμής της «γραμμικής παλινδρόμησης», όμως, είναι αρνητική και όχι αυτή που θεωρητικά αναμένεται, β) στη συσχέτιση ανάμεσα στο d-distance και στο $1/\mu_i$ με $R^2=0.79$. Όπως και παραπάνω, όμως, η κλίση της γραμμής της «γραμμικής παλινδρόμησης», είναι θετική και όχι αυτή που θεωρητικά αναμένεται, γ) στη συσχέτιση ανάμεσα στο d-distance και στο σ_i με $R^2=0.96$. Για την κλίση της γραμμής της παλινδρόμησης ισχύει, όπως και πριν, ότι αλλάζει σε σχέση με αυτή που παρατηρήσαμε παραπάνω για το αντίστοιχο μέγεθος, δηλαδή είναι αρνητική και όχι θετική, δ) στη συσχέτιση ανάμεσα στο d-

Συνοψίζοντας τα παραπάνω σε γενικές γραμμές αυτό που παρατηρήθηκε είναι πως ανάμεσα στα μεγέθη $1/\max(|\Lambda_i|)$, $1/\min(|\Lambda_i|)$, $1/\mu_i$, σ_i , $\varepsilon(\Lambda)$, τον γεωμετρικό μέσο και στα d_0 , d_1 , d_2 , d_3 , d_4 , d_5 , d-distance οι συσχετίσεις που πραγματοποιήθηκαν έχοντας λάβει ως δείγμα και τις δέκα παρατηρήσεις των υπό συσχέτιση μεγεθών δεν δίνουν κάποιο ενδιαφέρον αποτέλεσμα. Σε σχέση με τα μεγέθη $1/\mu_i$, σ_i , $\varepsilon(\Lambda)$, τον γεωμετρικό μέσο και τα μεγέθη d_0 , d_1 , d_2 , d_3 , d_4 , d_5 η συσχέτιση είναι καλή, με υψηλό R^2 , έχοντας λάβει ως δείγμα πέντε παρατηρήσεις που αφορούν στις ίδιες οικονομίες και σε πολλές περιπτώσεις παραμένει καλή έχοντας λάβει ως δείγμα επτά παρατηρήσεις που αφορούν στις ίδιες οικονομίες, με την κλίση της γραμμής της παλινδρόμησης να παραμένει ίδια σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν για κάθε μέγεθος και να είναι και αυτή που θεωρητικά αναμένεται. Έχοντας λάβει ως δείγμα λιγότερες παρατηρήσεις από τις συνολικά διαθέσιμες υψηλό R^2 προκύπτει και για την περίπτωση που εξετάσαμε τη συσχέτιση ανάμεσα στο μέγεθος $1/\max(|\Lambda_i|)$ και στα d_0 , d_1 , d_2 , d_3 , d_4 , d_5 με διαφορετικό, όμως, σύνολο παρατηρήσεων. Και σε αυτή την περίπτωση η κλίση της γραμμής της παλινδρόμησης είναι αυτή που θεωρητικά αναμένεται. Καμία συσχέτιση ανάμεσα στο μέγεθος $1/\min(|\Lambda_i|)$ και στα d_0 , d_1 , d_2 , d_3 , d_4 , d_5 δεν έδωσε υψηλό R^2 με κανένα σύνολο παρατηρήσεων. Σε σχέση με τα d-distance, υψηλό R^2 και την αναμενόμενη θεωρητικά κλίση της γραμμής της παλινδρόμησης λάβαμε σε τέσσερις περιπτώσεις. Όμως, σ' αυτές τις τέσσερις περιπτώσεις δεν λάβαμε ως δείγμα παρατηρήσεις που αφορούν στις ίδιες οικονομίες.

Τέλος, στην περίπτωση που το δείγμα μας είναι οι πέντε πιο συχνά εμφανιζόμενες παρατηρήσεις για όλες τις παλινδρομήσεις, τότε από όλες τις περιπτώσεις το καλύτερο R^2 για το d_0 δίνει ο γεωμετρικός μέσος και για το d_1 το $1/\mu_i$, ενώ για τα d_2 , d_3 , d_4 , d_5 το καλύτερο R^2 δίνει το σ_i . Όταν το δείγμα μας είναι οι επτά πιο συχνά εμφανιζόμενες παρατηρήσεις για όλες τις παλινδρομήσεις,

distance και στο $1/\max(|\Lambda_i|)$ με $R^2=0.80$. Η κλίση της γραμμής της «γραμμικής παλινδρόμησης», είναι θετική και όχι αρνητική όπως θεωρητικά αναμένεται. Τέλος, αν στις πέντε παρατηρήσεις προσθέσουμε και τις δυο παρατηρήσεις που αφορούν τα δυο έτη της Γαλλίας λαμβάνουμε σχετικά «υψηλό» R^2 σε δυο συσχετίσεις, δηλαδή στη συσχέτιση ανάμεσα στο d-distance και στο σ_i με $R^2=0.73$ και στη συσχέτιση ανάμεσα στο d-distance και στο $1/\max(|\Lambda_i|)$ με $R^2=0.84$. Και στις δυο περιπτώσεις, όμως, η κλίση της γραμμής της «γραμμικής παλινδρόμησης» δεν είναι αυτή που θεωρητικά αναμένεται.

τότε από όλες τις περιπτώσεις το καλύτερο R^2 για τα d_0, d_1, d_2 δίνει το μέγεθος $1/\mu_i$, ενώ για τα d_3, d_4, d_5 από όλες τις περιπτώσεις το καλύτερο R^2 δίνει ο γεωμετρικός μέσος²³.

²³ Για τα d-distance δεν αναφέρεται ποιο είναι το μέγεθος που δίνει το καλύτερο R^2 στις συσχετίσεις που πραγματοποιήθηκαν, διότι για τα d-distance οι συσχετίσεις που δίνουν R^2 υψηλό δεν αφορούν στο ίδιο σύνολο παρατηρήσεων. Σε κάθε περίπτωση έχουμε λάβει άλλο δείγμα και όταν λάβαμε ως δείγμα τις πέντε ή επτά παρατηρήσεις που εμφανίζονται πιο συχνά δεν παρατηρήθηκε η αναμενόμενη θεωρητικά μορφή συσχέτισης (όπου θεωρητικά αναμενόταν θετική συσχέτιση παρουσιάστηκε αρνητική και όπου θεωρητικά αναμενόταν αρνητική συσχέτιση παρουσιάστηκε θετική).

Συμπερασματικές Παρατηρήσεις

Στην παρούσα εργασία πραγματευθήκαμε εμπειρικά την προσέγγιση Bienefeld και την ακρίβεια της. Έχει παρατηρηθεί πως η δευτεροβάθμια προσέγγιση Bienefeld συγκλίνει αρκετά ικανοποιητικά στο διάνυσμα των τιμών παραγωγής και πως η κατανομή των ιδιοτιμών επιδρά στην ακρίβεια της προσέγγισης αυτής. Την απόκλιση του διανύσματος των τιμών παραγωγής από την δευτεροβάθμια μορφή της προσέγγισης, με βάση την τιμή του ισχύοντος σχετικού ποσοστού κέρδους ρ , επιχειρήσαμε να μετρήσουμε με δεδομένα που λάβαμε από δέκα πίνακες εισροών-εκροών. Επίσης, εξετάσαμε κατά πόσο η πολυωνυμική προσέγγιση μπορεί να είναι ακριβής μέσω ενός πολωνύμου χαμηλής τάξης, ενώ ελέγξαμε, περαιτέρω, την ύπαρξη ή μη συσχέτισης ανάμεσα στα μεγέθη που η τιμή τους εξαρτάται από την κατανομή των ιδιοτιμών ($1/\max(|\Lambda_i|)$, $1/\min(|\Lambda_i|)$, $1/\mu_i$, σ_i , $\varepsilon(\Lambda)$, γεωμετρικός μέσος) και στα μεγέθη που προσδιορίζουν την ακρίβεια της προσέγγισης (d_0 , d_1 , d_2 , d_3 , d_4 , d_5 , d-distance).

Ειδικότερα, στο πρώτο μέρος της παρούσας εργασίας αναπτύχθηκε ο τρόπος εξαγωγής του πολυωνυμικού αναπτύγματος Bienefeld και η ακρίβεια αυτού συνδέθηκε με την κατανομή των ιδιοτιμών. Η εμπειρική ανάλυση ακολούθησε στο δεύτερο μέρος και βασίστηκε στους πίνακες εισροών – εκροών της Φινλανδίας για τα έτη 1995 και 2004, της Σουηδίας για τα έτη 1995 και 2005, της Γερμανίας για τα έτη 2000 και 2002, της Γαλλίας για τα έτη 1995 και 2005 και της Δανίας για τα έτη 2000 και 2004. Στο δεύτερο μέρος παρουσιάσαμε, αρχικά, τα εμπειρικά δεδομένα και τον τρόπο που αυτά εξάγονται από τους δέκα πίνακες. Εν συνεχεία, περιγράψαμε τους λοιπούς απαιτούμενους υπολογισμούς και τέλος, καταγράψαμε και σχολιάσαμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν τόσο για την προσέγγιση Bienefeld όσο και για τις συσχετίσεις που πραγματοποιήθηκαν.

Τα συμπεράσματα που εξάγονται από την εργασία είναι τα ακόλουθα:

1. Το διάνυσμα των τιμών παραγωγής προσεγγίζεται αρκετά ικανοποιητικά από την δευτεροβάθμια προσέγγιση Bienefeld στο μεγαλύτερο μέρος του δείγματός μας. Σε επτά από τις δέκα περιπτώσεις που εξετάστηκαν αποδείχθηκε ότι, η απόκλιση του διανύσματος \mathbf{p}^T από την προσέγγιση $(\mathbf{p}^a)^T$ είναι μικρή. Δεν πρέπει να ξεχνάμε, βέβαια, πως στις μετρήσεις μας για κάθε περίπτωση από τις εξεταζόμενες

εμπλέκεται η ισχύουσα κατανομή του εισοδήματος. Αν αυτή αλλάξει και το σχετικό ποσοστό κέρδους του συστήματος ρ λάβει διαφορετική τιμή, τότε ίσως το αποτέλεσμα να είναι ικανοποιητικό σε όλες τις περιπτώσεις (ή και σε καμία). Αυτό, όμως, δεν μπορούμε να το γνωρίζουμε εκ των προτέρων. Εμείς οφείλουμε να επισημάνουμε πως με βάση την τιμή του ισχύοντος ρ παρατηρήθηκαν και εξαιρέσεις. Σε τρεις από τις δέκα περιπτώσεις η προσέγγιση δεν ήταν ικανοποιητική.

2. Από την άλλη πλευρά, βάσει των μεγεθών που προέκυψαν, αποδείχθηκε ότι, η προσέγγιση Bienefeld μπορεί να είναι ακριβής με λίγους όρους του πολυωνύμου της σχέσης (8). Μέσω ενός πολυωνύμου χαμηλής τάξης μπορούμε να φτάσουμε σε αρκετά ικανοποιητικό σημείο σύγκλισης.

3. Τέλος, οι συσχετίσεις που πραγματοποιήθηκαν έχοντας λάβει ως δείγμα και τις δέκα παρατηρήσεις από κάθε μέγεθος δεν έδειξαν αυτό που θεωρητικά αναμέναμε. Οι συσχετίσεις, όμως, που πραγματοποιήθηκαν ανάμεσα στα μεγέθη $1/\max(|\Lambda_i|)$, $1/\mu_i$, σ_i , $\varepsilon(\Lambda)$, τον γεωμετρικό μέσο και στα $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$, έχοντας λάβει ως δείγμα λιγότερες παρατηρήσεις από τις συνολικά διαθέσιμες, δίνουν υψηλό R^2 και η κλίση της γραμμής της ευρισκόμενης συσχέτισης παραμένει πάντα ίδια στις διάφορες αυξομειώσεις που έγιναν στο δείγμα και σε όλες τις περιπτώσεις είναι και η αναμενόμενη θεωρητικά. Καμία συσχέτιση ανάμεσα στο μέγεθος $1/\min(|\Lambda_i|)$ και στα $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$ δεν έδωσε υψηλό R^2 με κανένα σύνολο παρατηρήσεων, ενώ σε σχέση με τα d-distance υψηλό R^2 και την αναμενόμενη θεωρητικά κλίση της γραμμής της παλινδρόμησης λάβαμε σε τέσσερις περιπτώσεις με τα μεγέθη ρ , $\varepsilon(\Lambda)$, τον γεωμετρικό μέσο και το $1/\min(|\Lambda_i|)$. Επίσης, παρατηρήθηκε πως στις συσχετίσεις που πραγματοποιήθηκαν έχοντας λάβει ως δείγμα παρατηρήσεις που αφορούν τις ίδιες οικονομίες τρία μεγέθη δίνουν ισχυρότερες συσχετίσεις, το μέγεθος $1/\mu_i$, η τυπική απόκλιση σ_i και ο γεωμετρικός μέσος.

Εν κατακλείδι, οφείλουμε να επισημάνουμε ότι, η διερεύνηση μας έχει στατιστικό χαρακτήρα και πρόκειται για ένα θέμα που μπορεί να μελετηθεί περαιτέρω εμπειρικά. Ειδικότερα, θεωρούμε ότι θα είχε ενδιαφέρον, αρχικά, η εξαγωγή κι άλλων μεγεθών που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν στην διερεύνηση (ενδεικτικά αναφέρουμε: Mahalanobis distance, rank correlation coefficient κ.α.) και έπειτα, η επέκταση της διερεύνησης σε περισσότερες χώρες. Σε κάθε περίπτωση, πάντως, διαφαίνεται ότι τα παρόντα ευρήματα δύνανται να αποτελέσουν τη βάση για μελλοντικές έρευνες.

Αναφορές

- Barnett, S. (1990) *Matrices. Methods and Applications* (Oxford: Clarendon Press).
- Bienenfeld, M. (1988) Regularity in price changes as an effect of changes in distribution, *Cambridge Journal of Economics*, 12, pp. 247-255.
- Γκυγιωμό, Ζ. ([1965]1984) *Κυβερνητική και Διαλεκτικός Υλισμός* (Αθήνα: Θεμέλιο).
- Λίβας, Π. (1994) *Ανάλυση εισροών - εκροών*, Αθήνα – Πειραιάς, εκδόσεις: Α. Σταμούλης
- Μαριόλης, Θ. (2008) Κατανομή ιδιοτιμών, εντροπία της μήτρας των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών και τιμές παραγωγής: Εμπειρική Διερεύνηση, Εσωτερική Έκθεση, (Ομάδα μελέτης Στραφφαϊανών Οικονομικών), τμήμα Δημόσιας Διοίκησης, Πάντειο Πανεπιστήμιο.
- Mariolis, T. and Tsoulfidis, L., (2008) Decomposing the changes in production prices into ‘capital-intensity’ and ‘price’ effects: theory and evidence from the Chinese economy, *Contributions to Political Economy* (forthcoming).
- Mariolis, T. and Soklis, G., (2009) Additive Labour Values and Prices of Production: Evidence from the Supply and Use Tables of the German and Greek Economy, *International Input-Output Association* (Working Papers in Input-Output Economics)
- Pasinetti, L. (1991) *Παραδόσεις θεωρίας της παραγωγής* (Αθήνα: Κριτική)
- Pasinetti, L. (1973) The notion of vertical integration in economic analysis, *Metroeconomica*, 25, pp. 1-29.

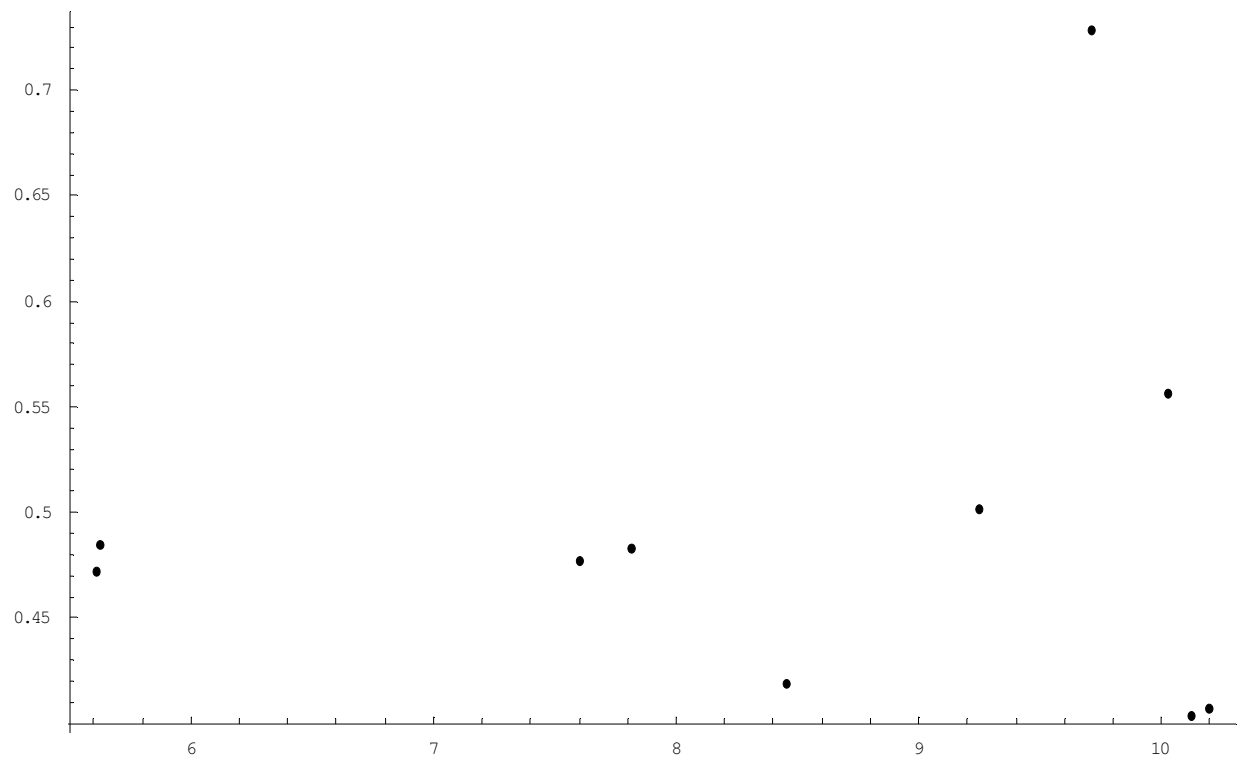
- Petz, D. (2001) Entropy, von Neumann and the von Neumann entropy, in: M. Rédei and M. Stöltzner (Eds) *John von Neumann and the Foundations of Quantum Physics* (New York: Springer-Verlag) (<http://arxiv.org/abs/math-ph/0102013>).
- Proops, J. L. R. (1983) Organisation and dissipation in economic systems, *Journal of Social and Biological Structures*, 6, pp. 353-366.
- Rothblum, U. and Tan, C. (1985) Upper bounds on the maximum modulus of subdominant eigenvalues of nonnegative matrices, *Linear Algebra and its Applications*, 66, pp. 45-85.
- Schneider, T. D. (2007) Information theory primer. With an appendix on logarithms (<http://www.lecb.ncifcrf.gov/~toms/paper/primer/>).
- Soofi, A. (1992) Industry linkages, indices of variation and structure of production: an international comparison, *Economic Systems Research*, 4, pp. 349-376.
- Sraffa, P. (1960) *Production of Commodities by Means of Commodities. Prelude to a Critique of Economic Theory* (Cambridge: Cambridge University Press).
- Steedman, I. (1999) Vertical Integration and 'reduction to dated quantities of labour', in: G. Mongiovi and F. Petri (Eds) *Value Distribution and Capital. Essays in Honour of Pierangelo Garegnani*, pp. 314-318 (London and New York: Routledge).
- Steedman, I. and Tomkins, J. (1998) On measuring the deviation of prices from values, *Cambridge Journal of Economics*, 22, pp. 379-385.

Λόγω του μεγάλου όγκου των εμπειρικών δεδομένων καθώς και των αποτελεσμάτων δεν είναι δυνατή η εκτύπωση και παράθεση όλων αυτών στην παρούσα εργασία. Είναι, όμως, διαθέσιμα από τη συγγραφέα σε ηλεκτρονική μορφή, εφόσον ζητηθούν. Οι πίνακες εισροών – εκροών από τους οποίους αντλήθηκαν τα εμπειρικά δεδομένα είναι διαθέσιμοι και στην ιστοσελίδα <http://ec.europa.eu/eurostat>. Το παράρτημα Α περιλαμβάνει τα διαγράμματα που κατασκευάστηκαν, ώστε να ελεγχθεί η μορφή συσχέτισης των στατιστικών μέτρων $1/\mu_i$, σ_i , $\varepsilon(\Lambda)$, του γεωμετρικού μέσου και των λόγων $1/\max(|\Lambda_i|)$ και $1/\min(|\Lambda_i|)$ με τα d_0 , d_1 , d_2 , d_3 , d_4 , d_5 και d-distance. Το παράρτημα Β περιλαμβάνει ορισμένες από τις παλινδρομήσεις που πραγματοποιήθηκαν και έδειξαν ισχυρή συσχέτιση ανάμεσα στα υπό εξέταση μεγέθη. Και σε αυτή την περίπτωση ήταν αδύνατη η εκτύπωση όλων των παλινδρομήσεων. Έτσι, επιλέχθηκαν, ενδεικτικά, ορισμένες από αυτές που δίνουν υψηλό R^2 .

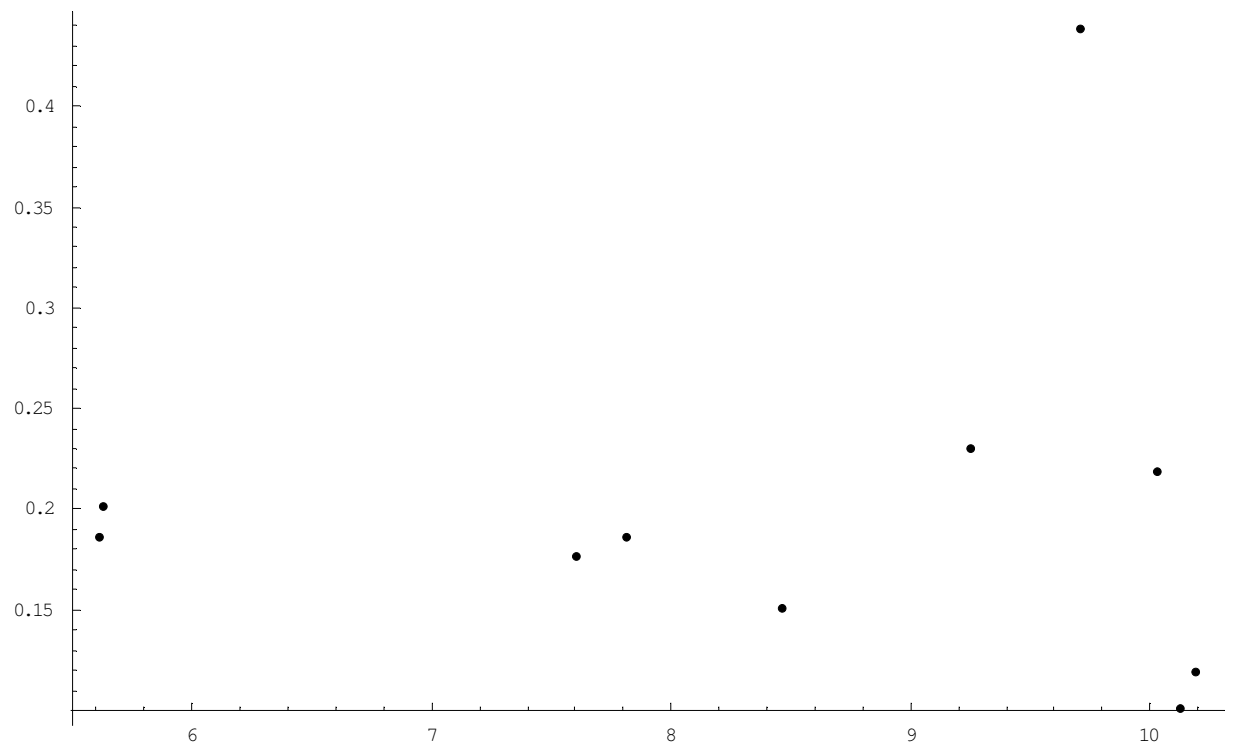
Παράρτημα Α

I. Διαγράμματα $1/\mu_i - d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$, d-distance

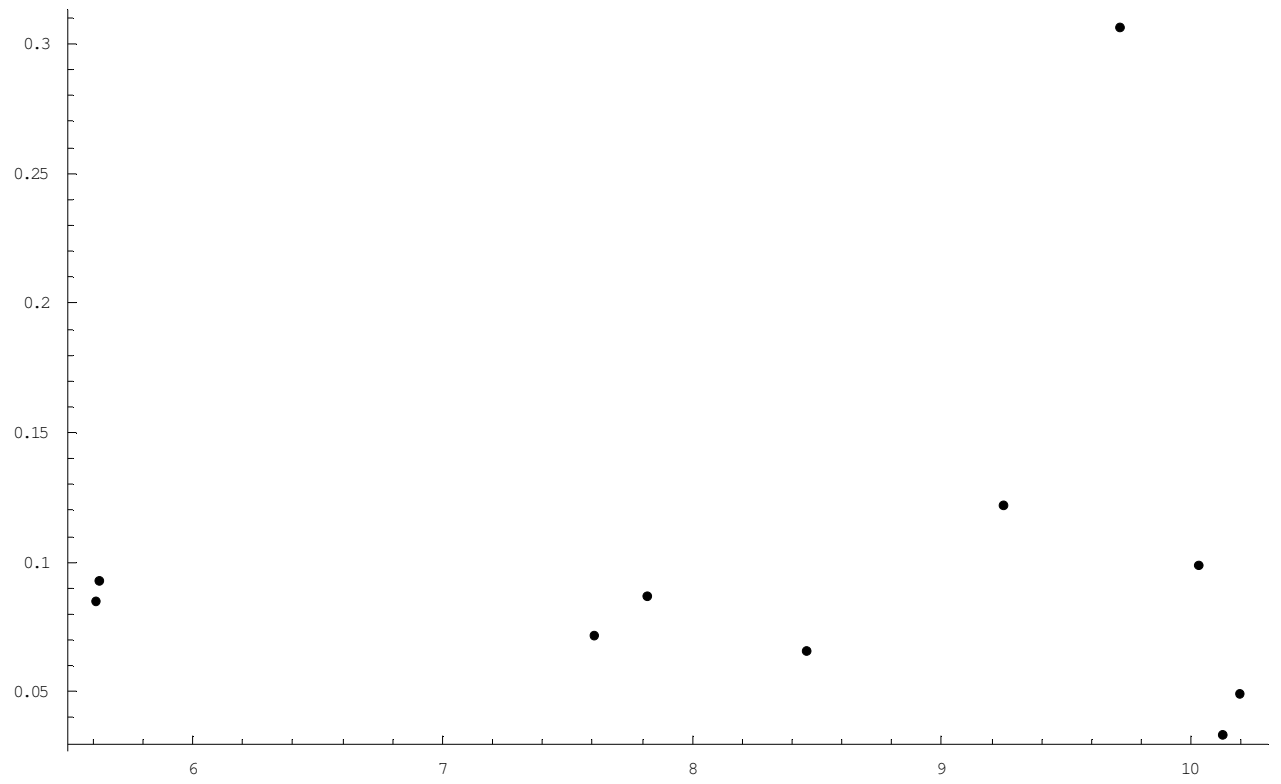
1) $1/\mu_i - d_0$



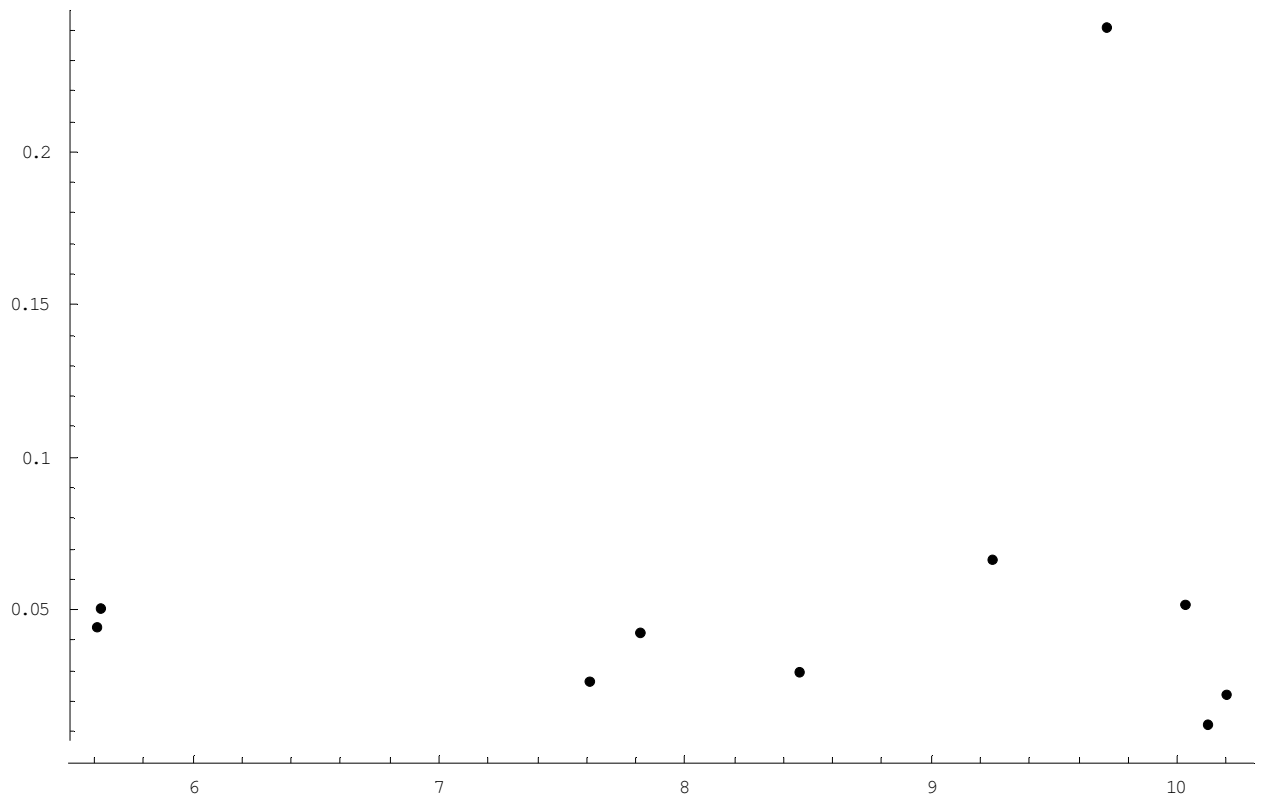
2) $1/\mu_i - d_1$



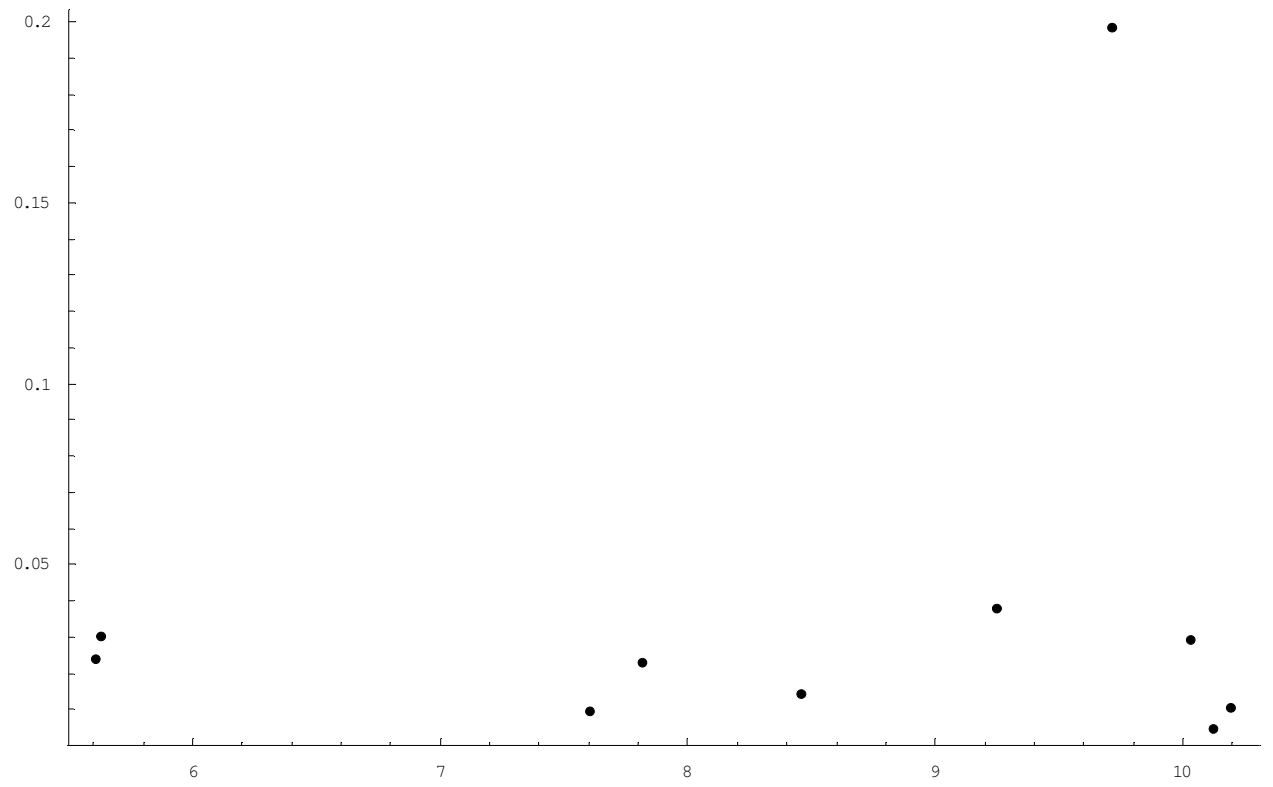
3) $1/\mu_i - d_2$



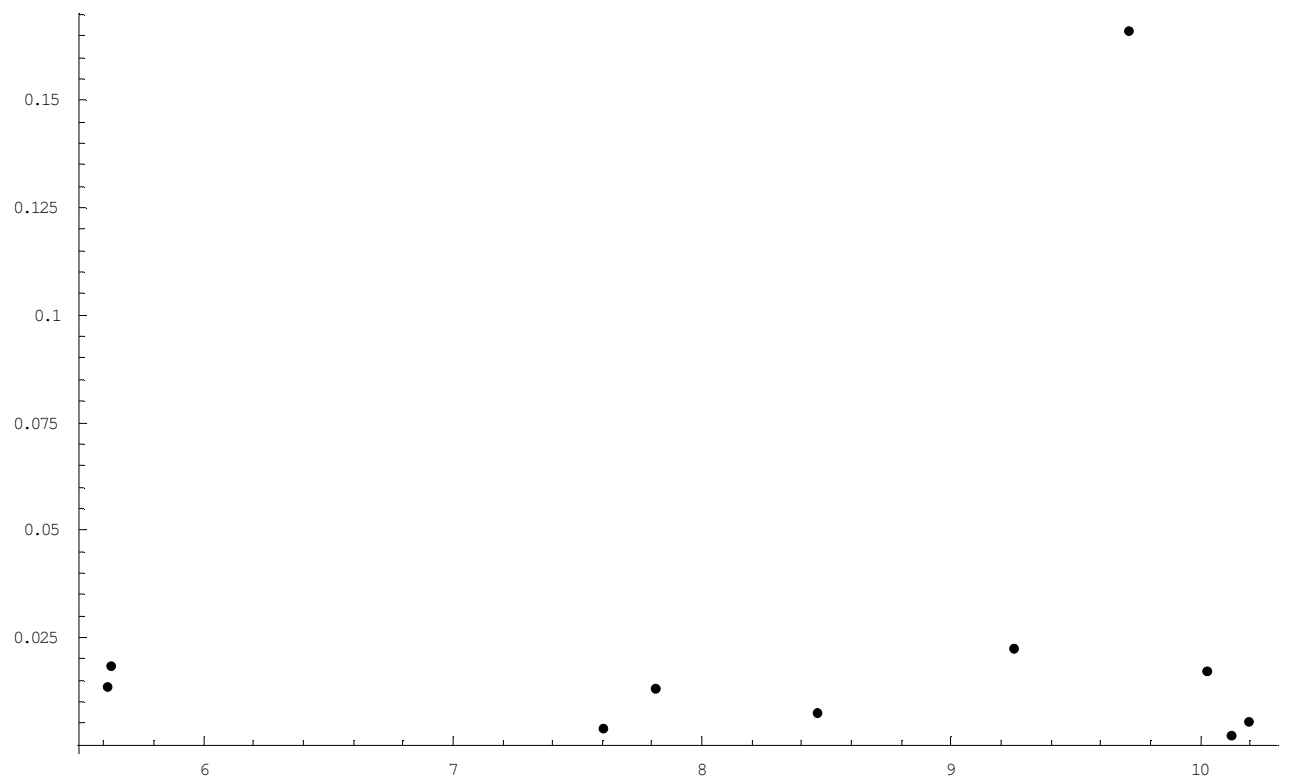
4) $1/\mu_i - d_3$



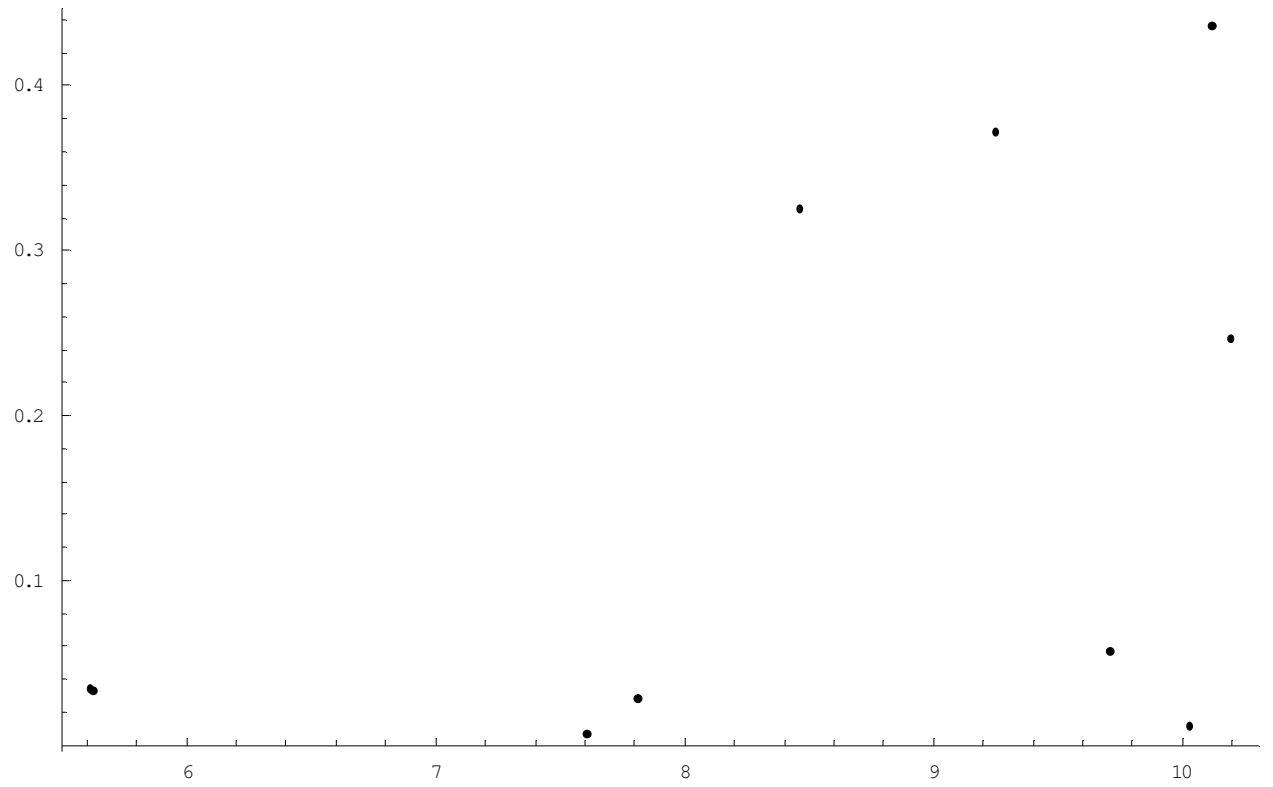
5) $1/\mu_i - d_4$



6) $1/\mu_i - d_5$

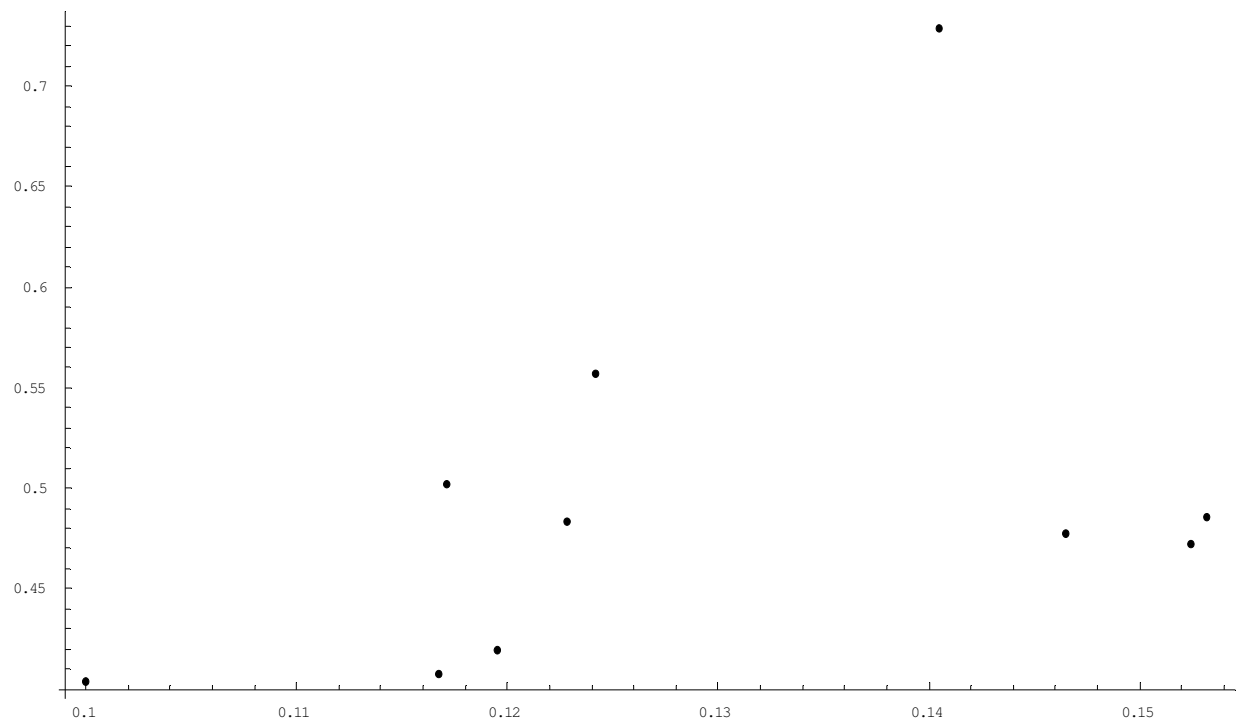


7) $1/\mu_i$ - d-distance

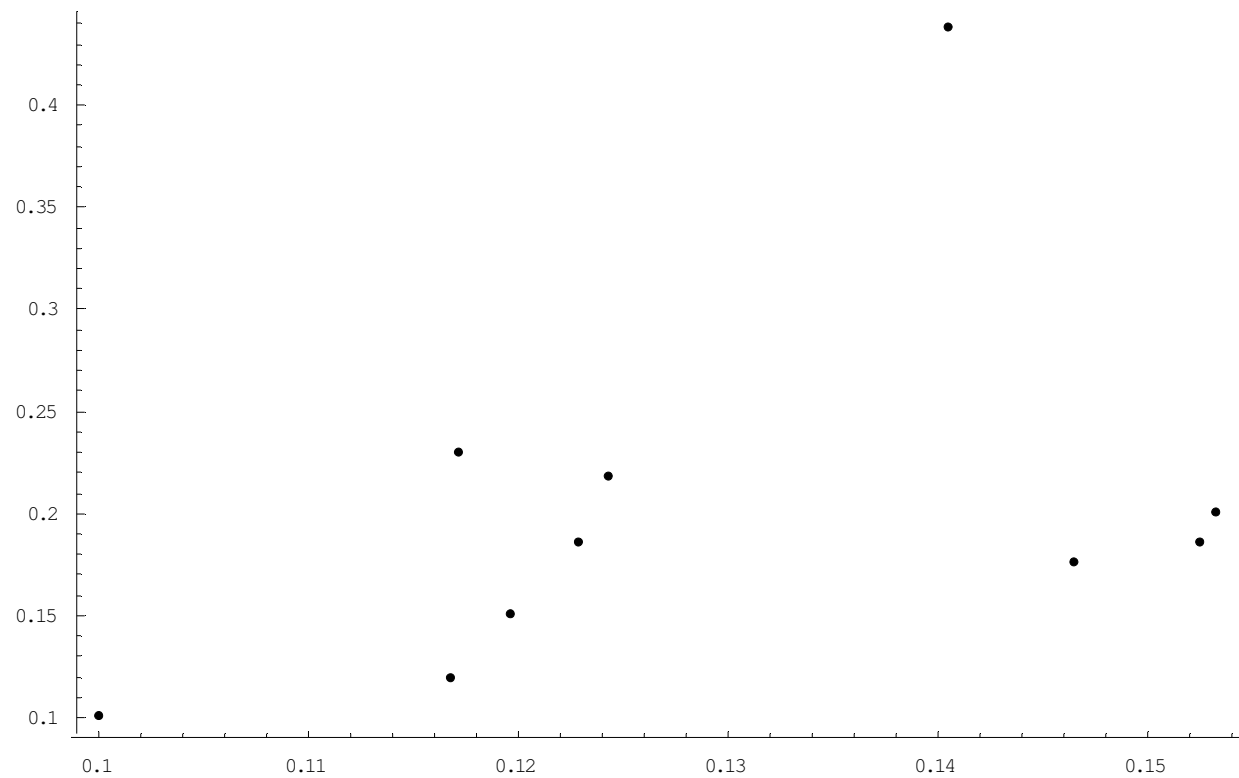


II. Διαγράμματα $\sigma_i - d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d$ -distance

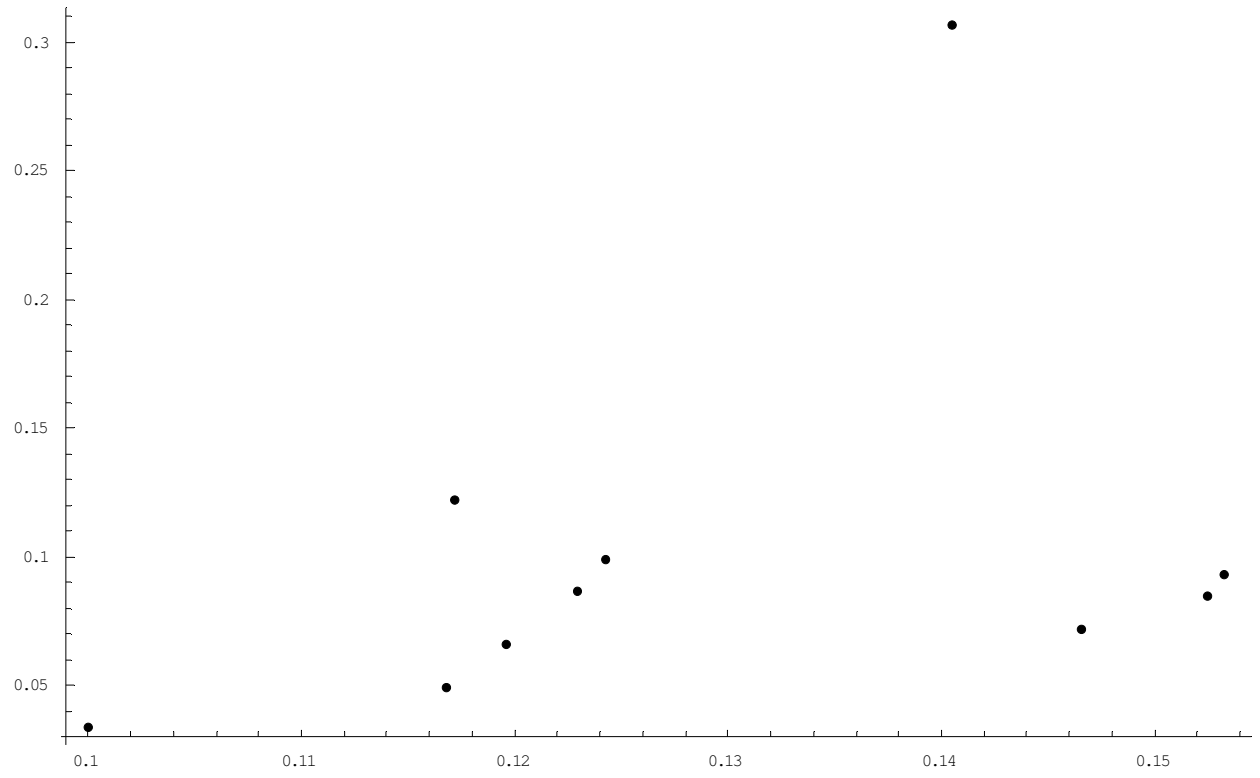
1) $\sigma_i - d_0$



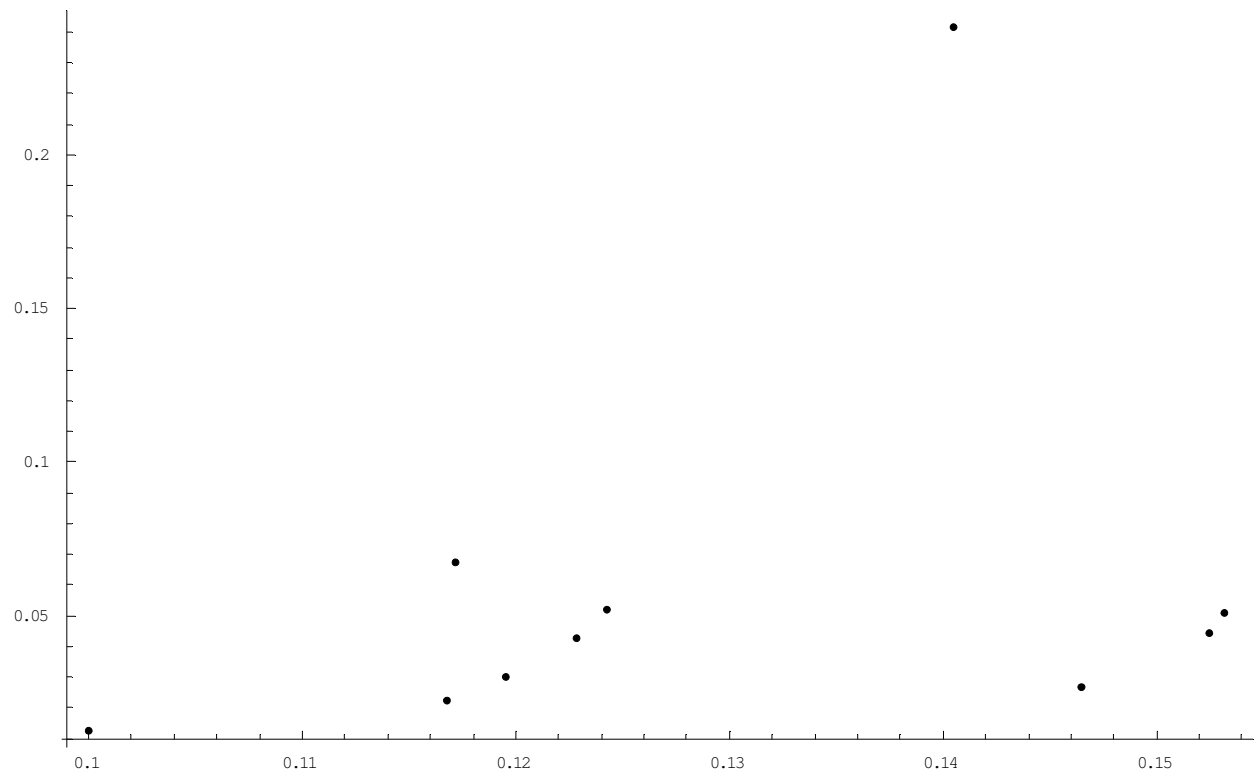
2) $\sigma_i - d_1$



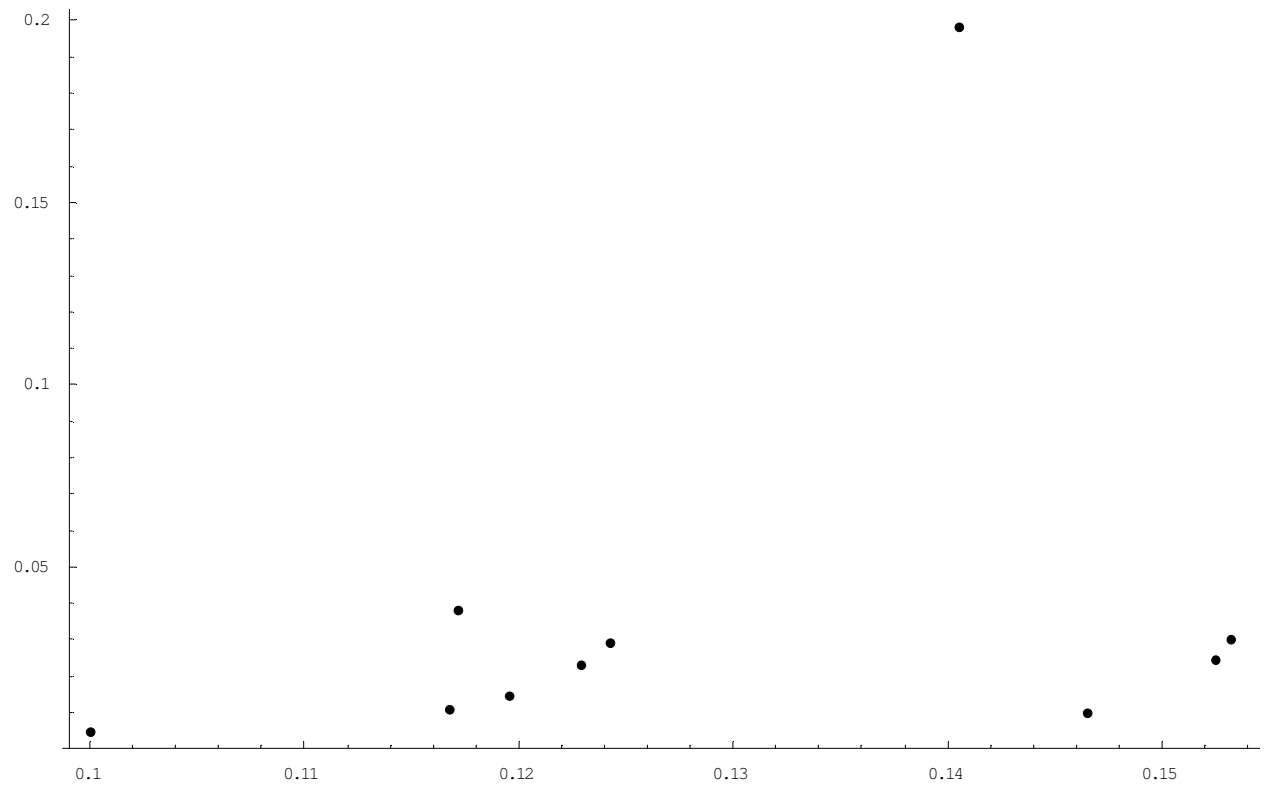
3) $\sigma_i - d_2$



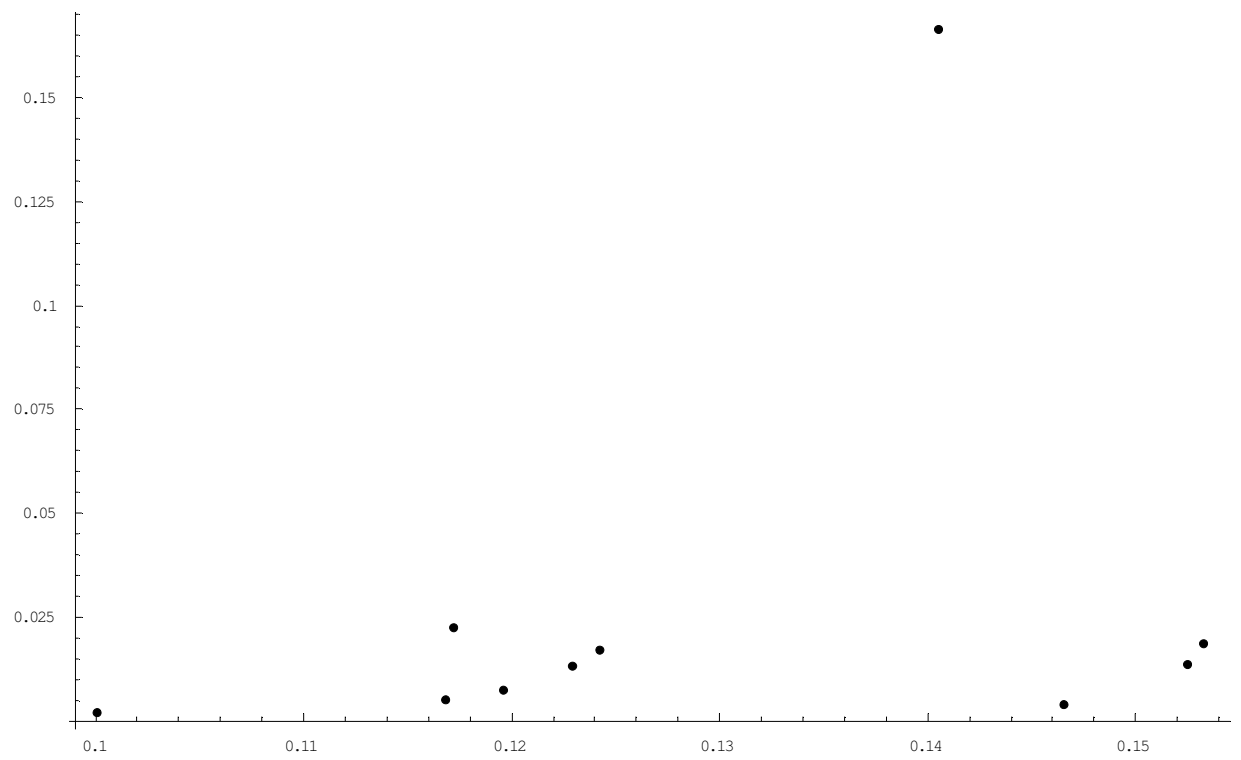
4) $\sigma_i - d_3$



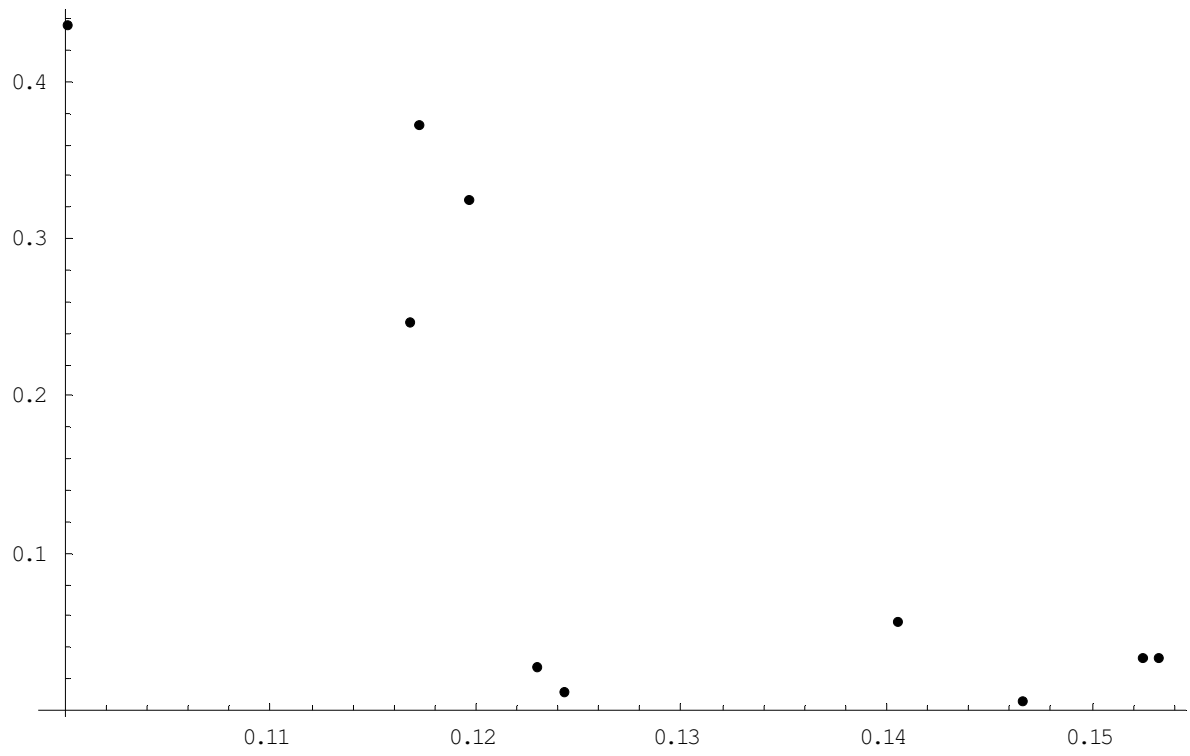
5) $\sigma_i - d_4$



6) $\sigma_i - d_5$

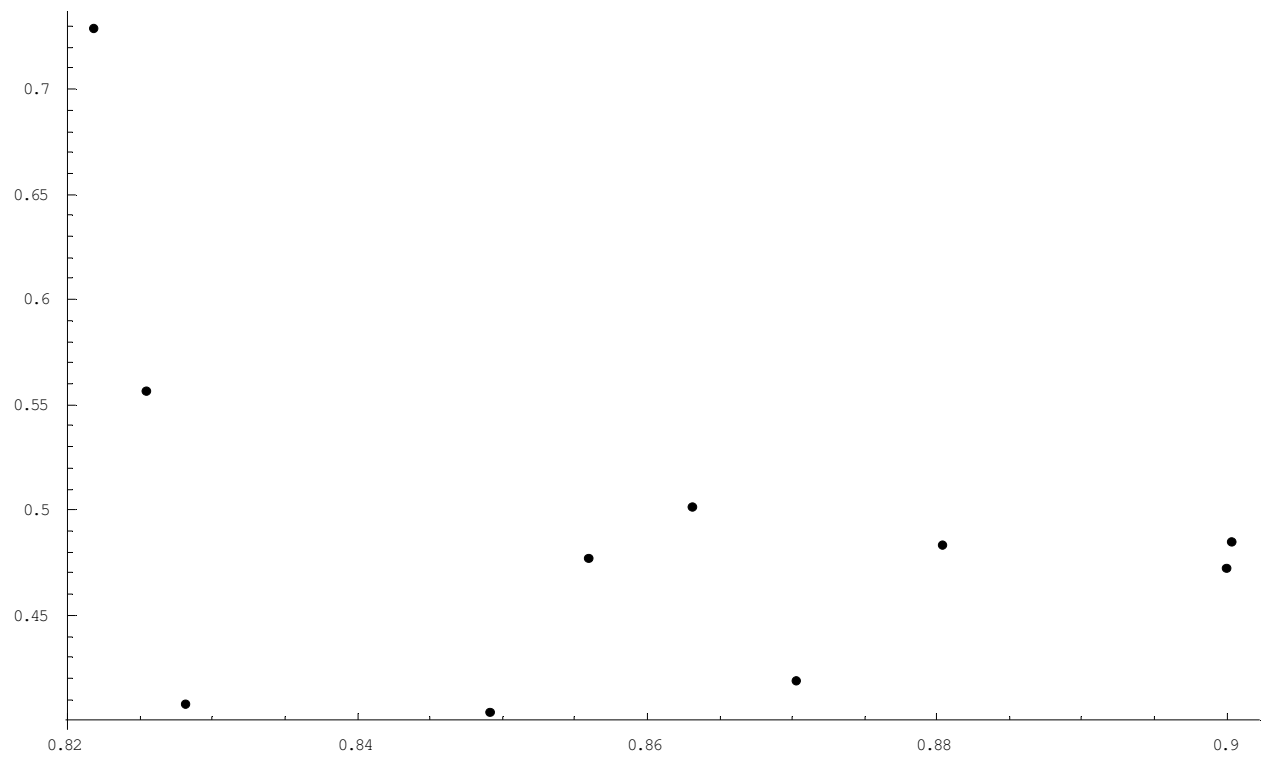


7) σ_i - d-distance

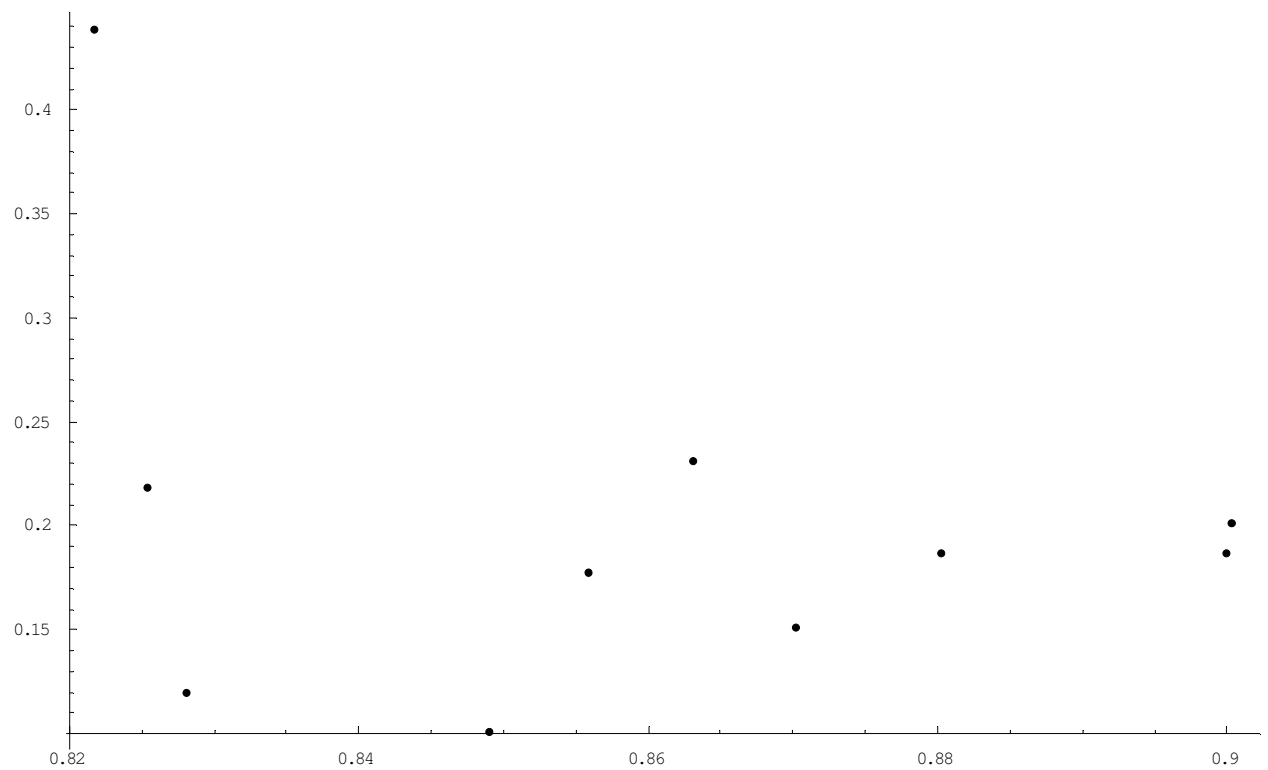


III. Διαγράμματα $\varepsilon(\Lambda)$ - $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$, d-distance

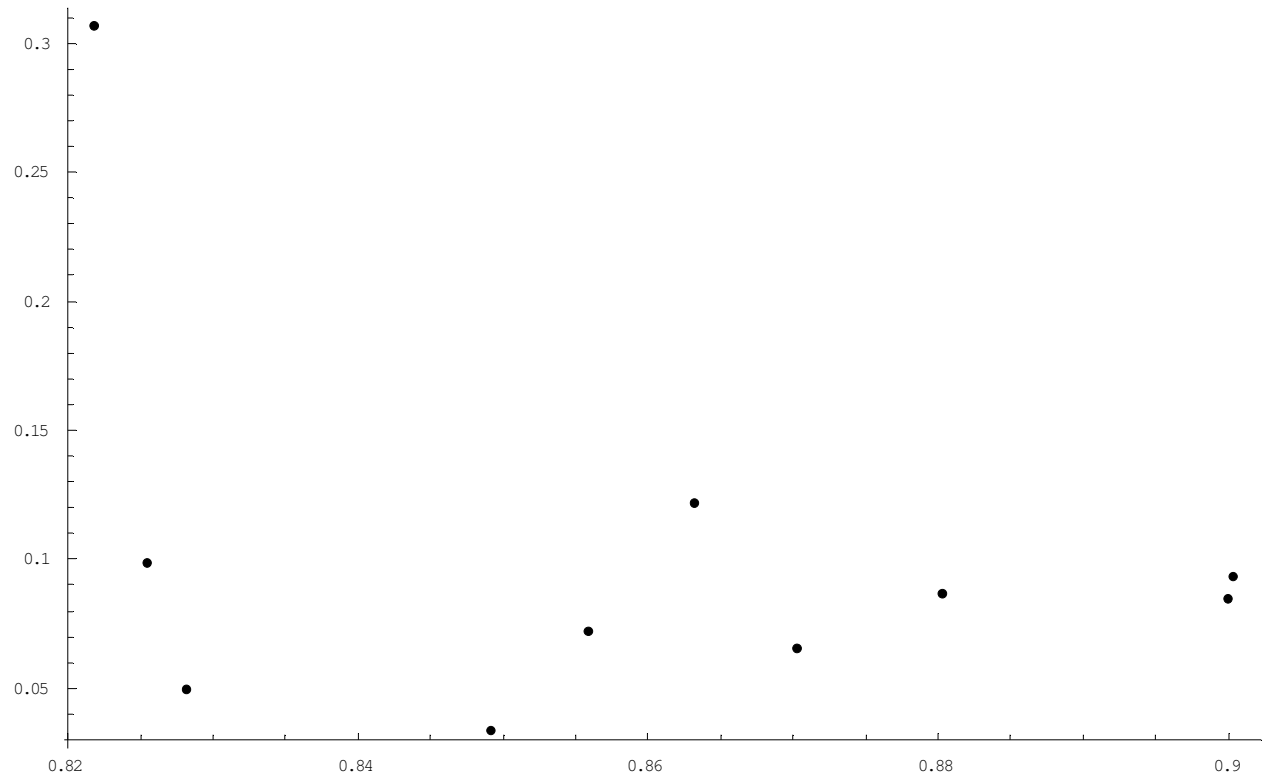
1) $\varepsilon(\Lambda)$ - d_0



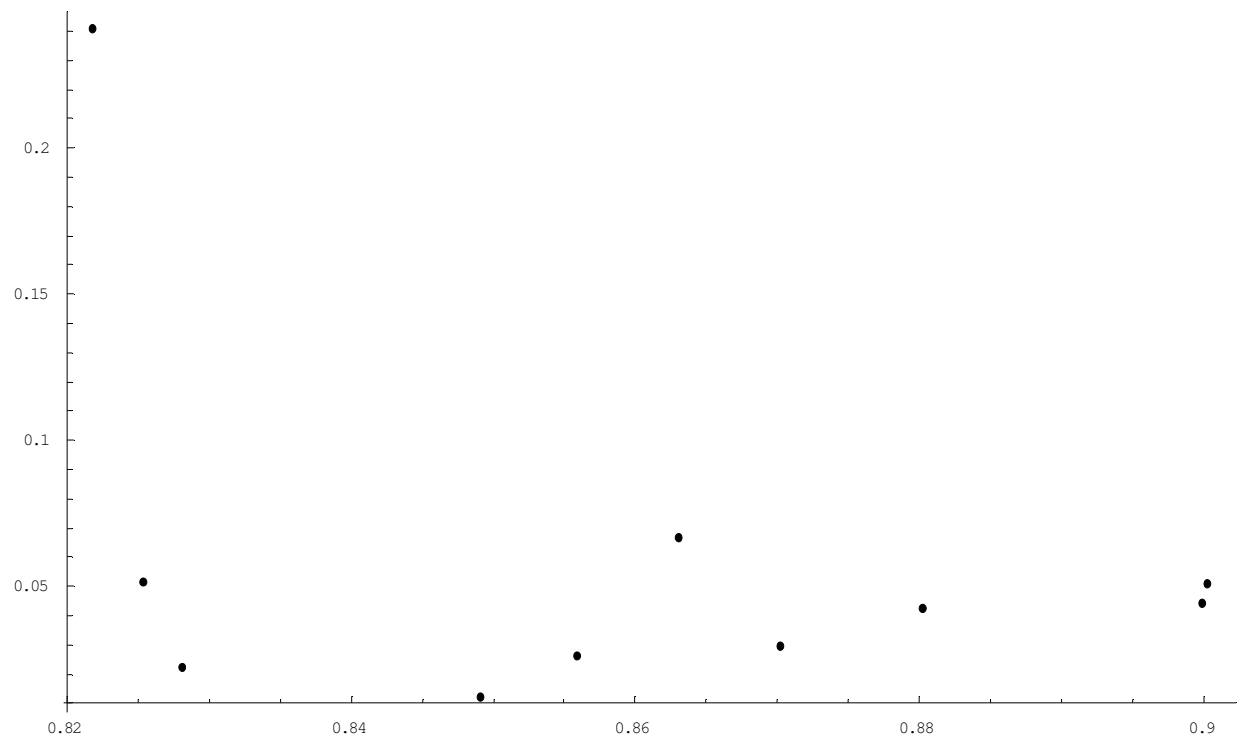
2) $\varepsilon(\Lambda)$ - d_1



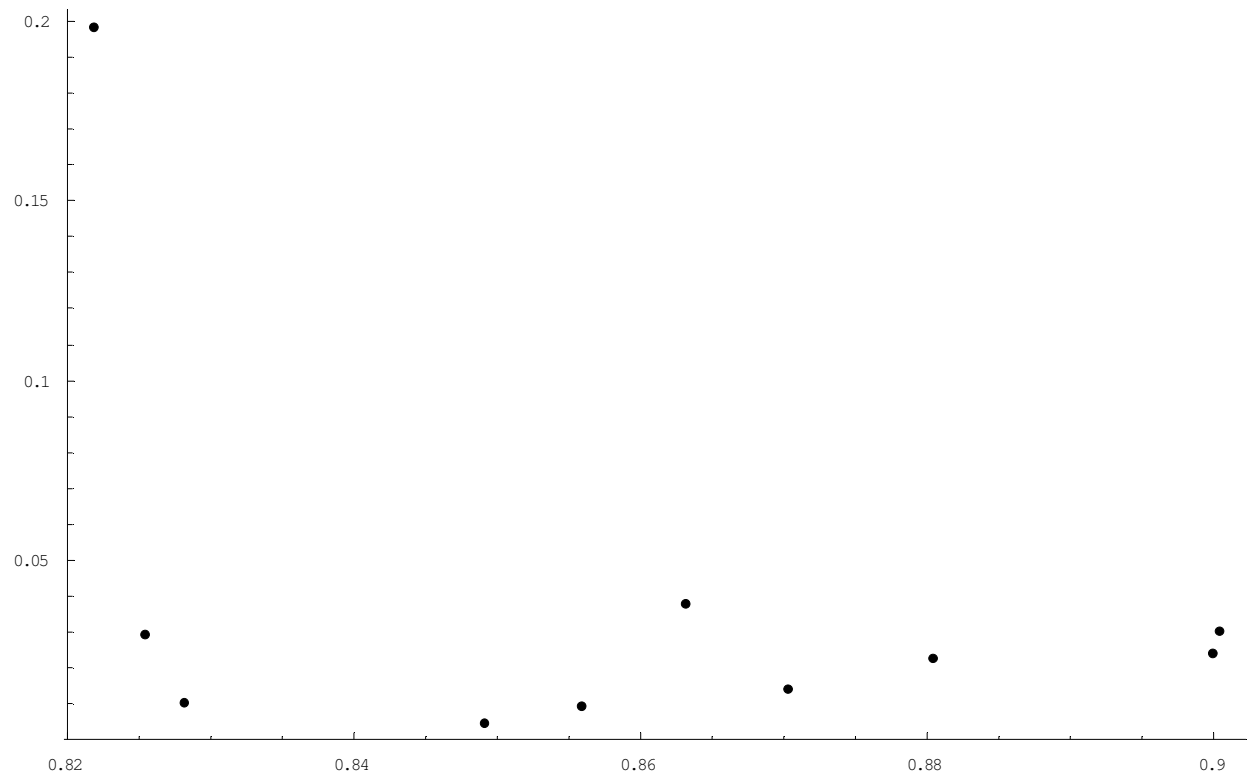
3) $\varepsilon(\Lambda) - d_2$



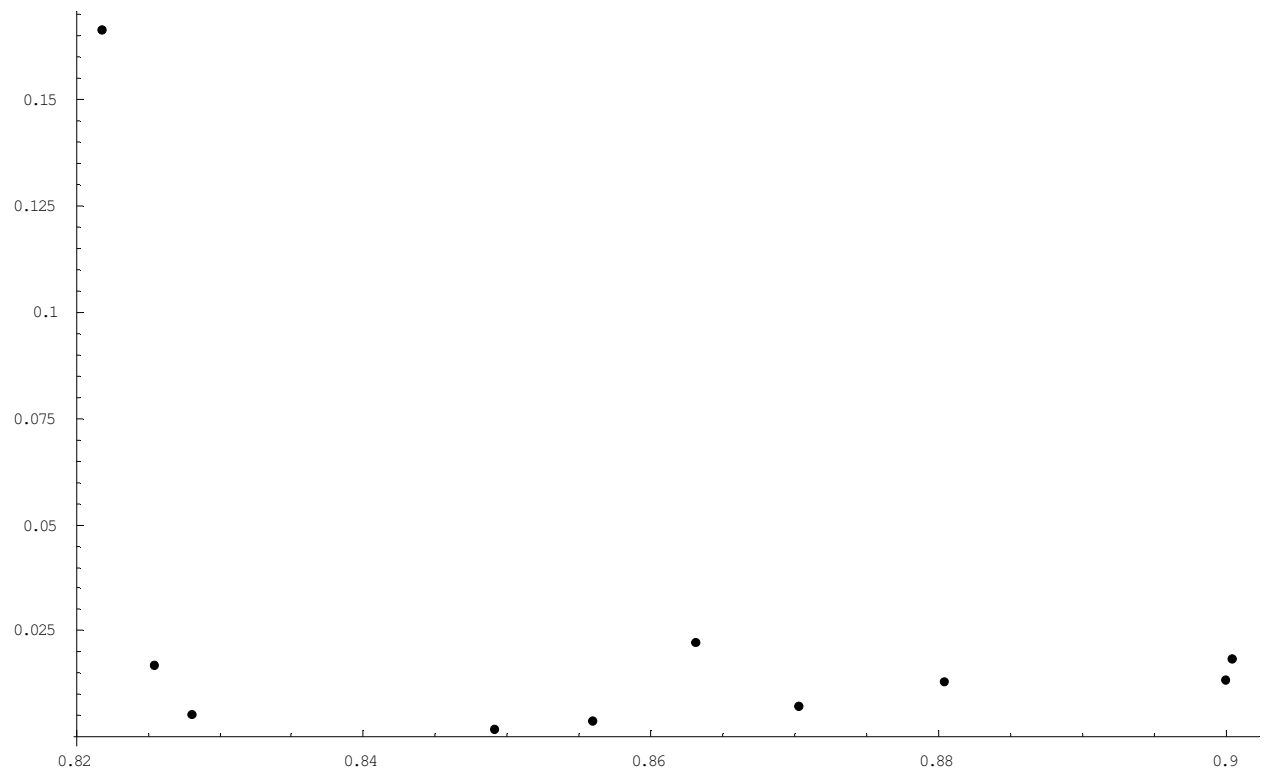
4) $\varepsilon(\Lambda) - d_3$



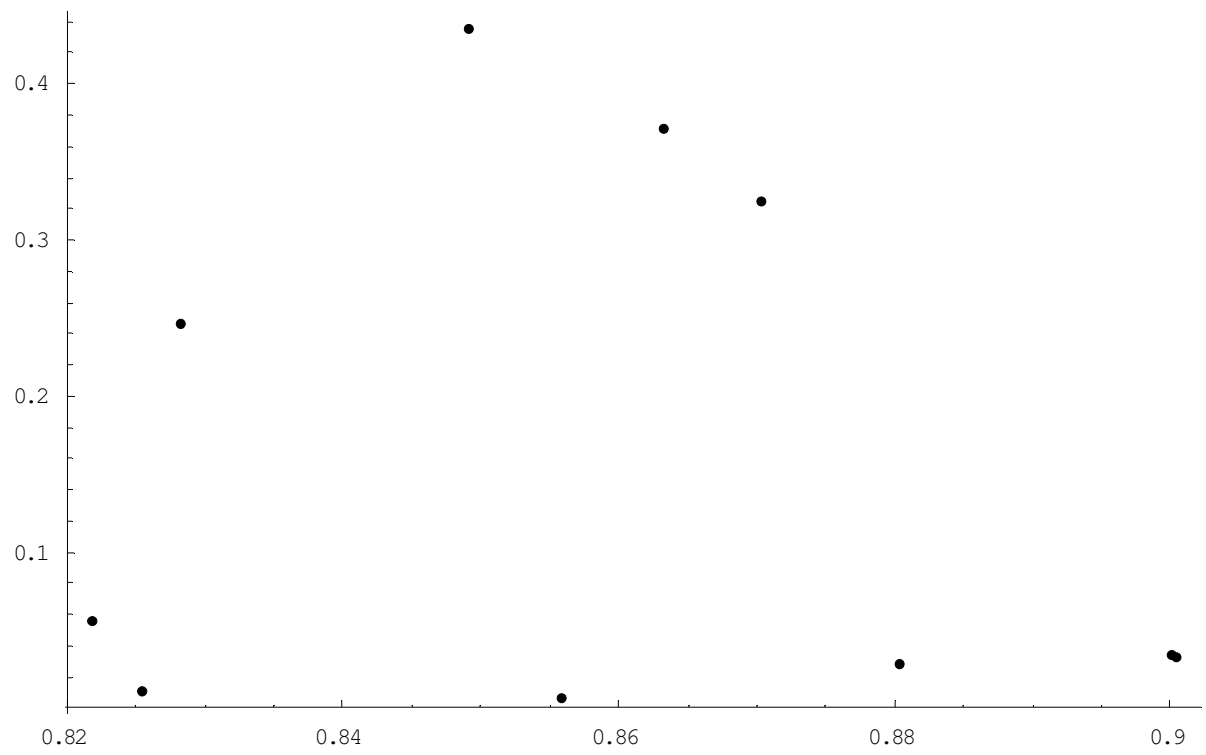
5) $\varepsilon(\Lambda) - d_4$



6) $\varepsilon(\Lambda) - d_5$

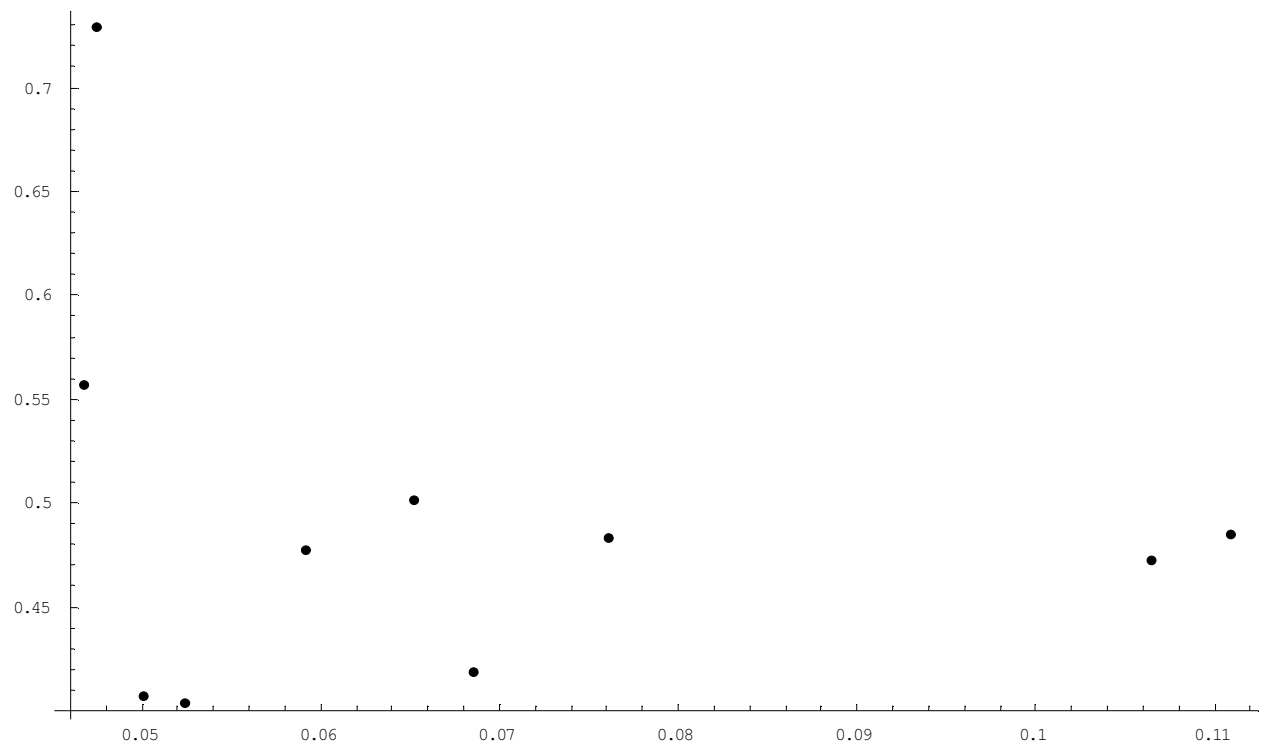


7) $\varepsilon(\Lambda)$ - d-distance

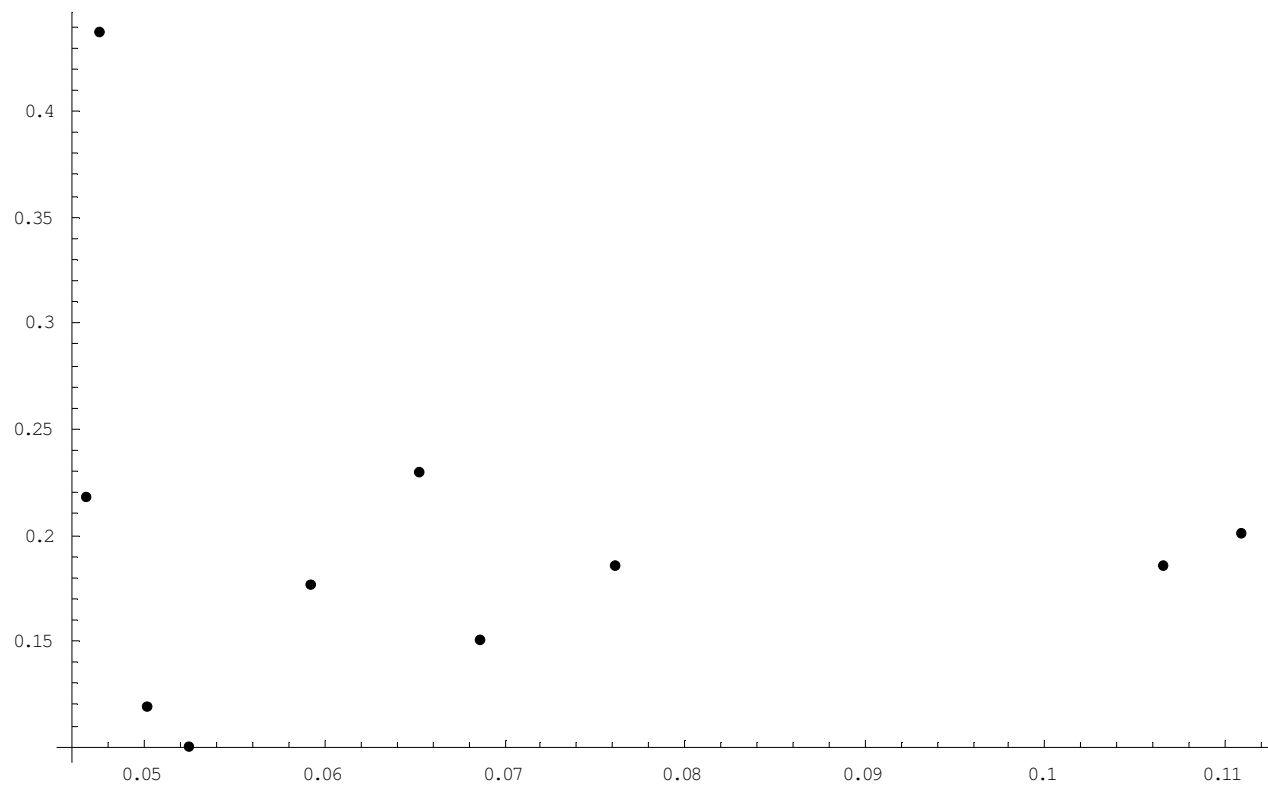


IV. Διαγράμματα γεωμετρικού μέσου - $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$, d-distance

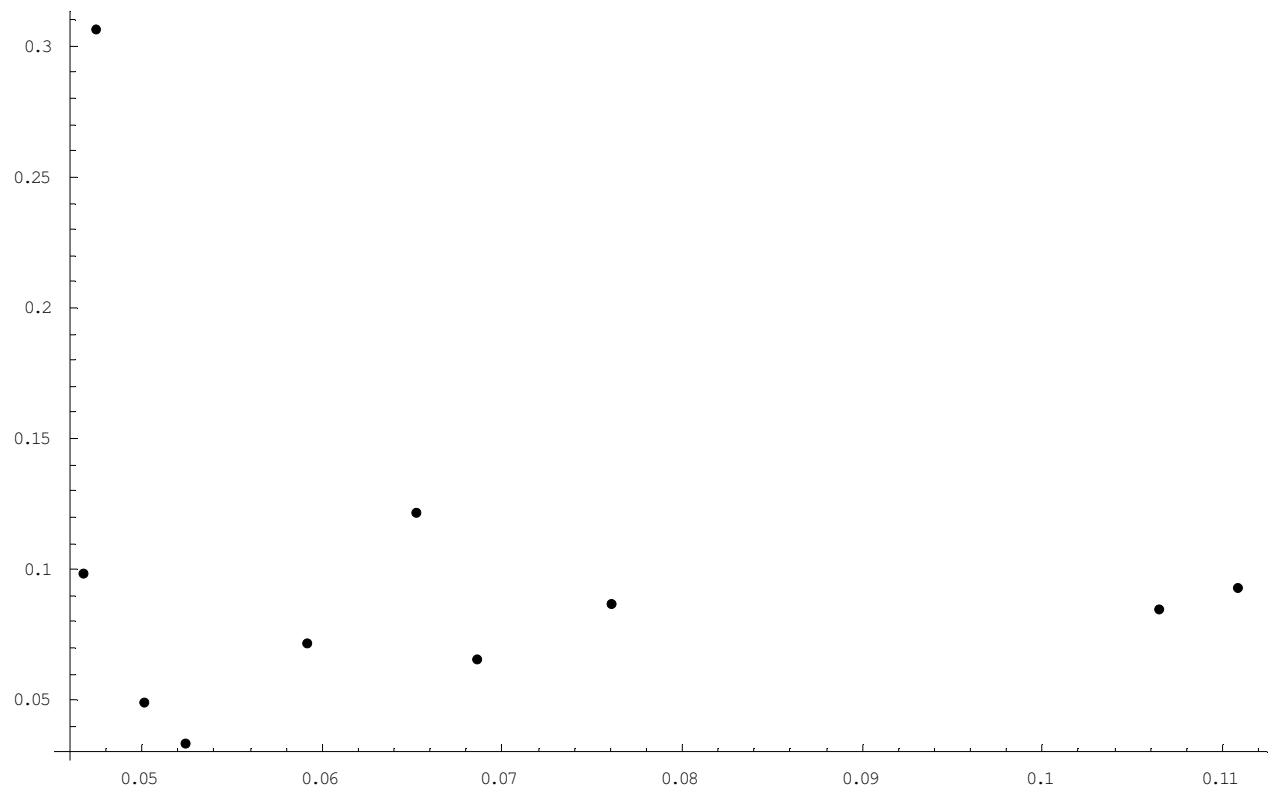
1) γεωμετρικός μέσος - d_0



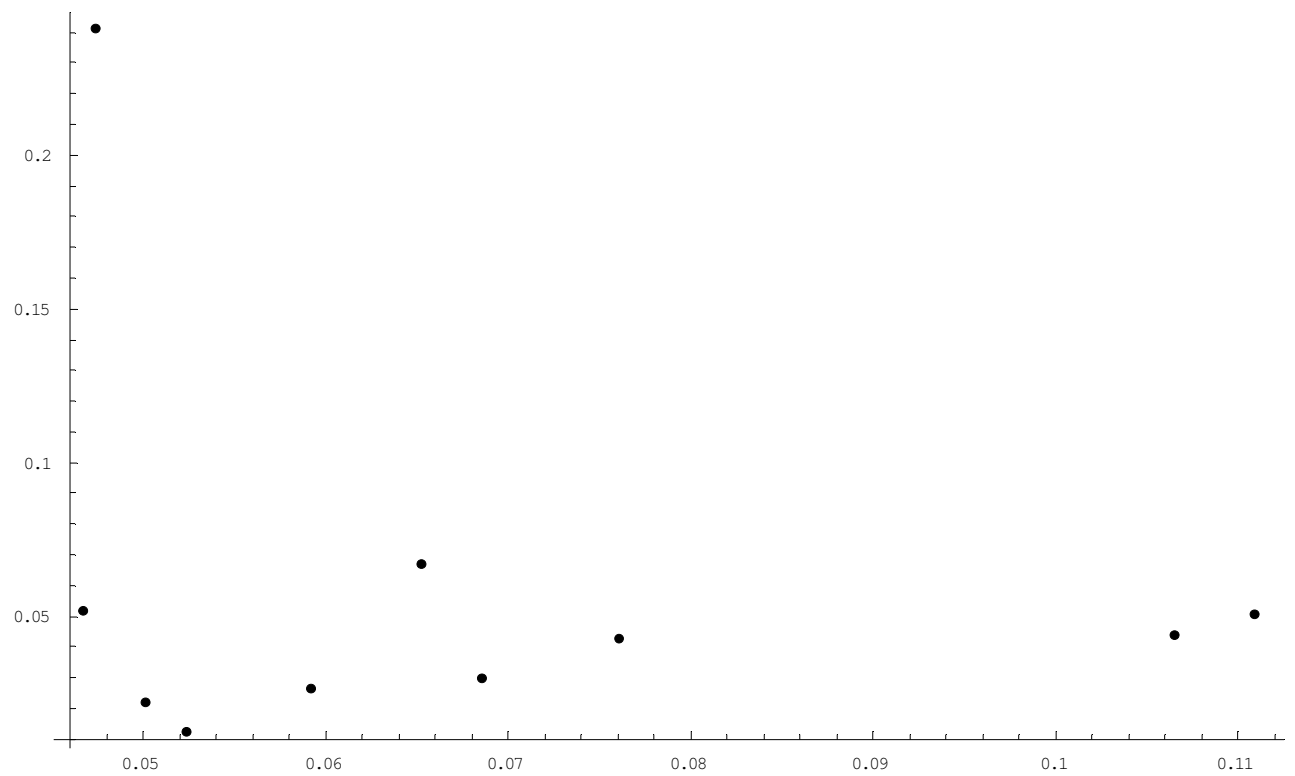
2) γεωμετρικός μέσος - d_1



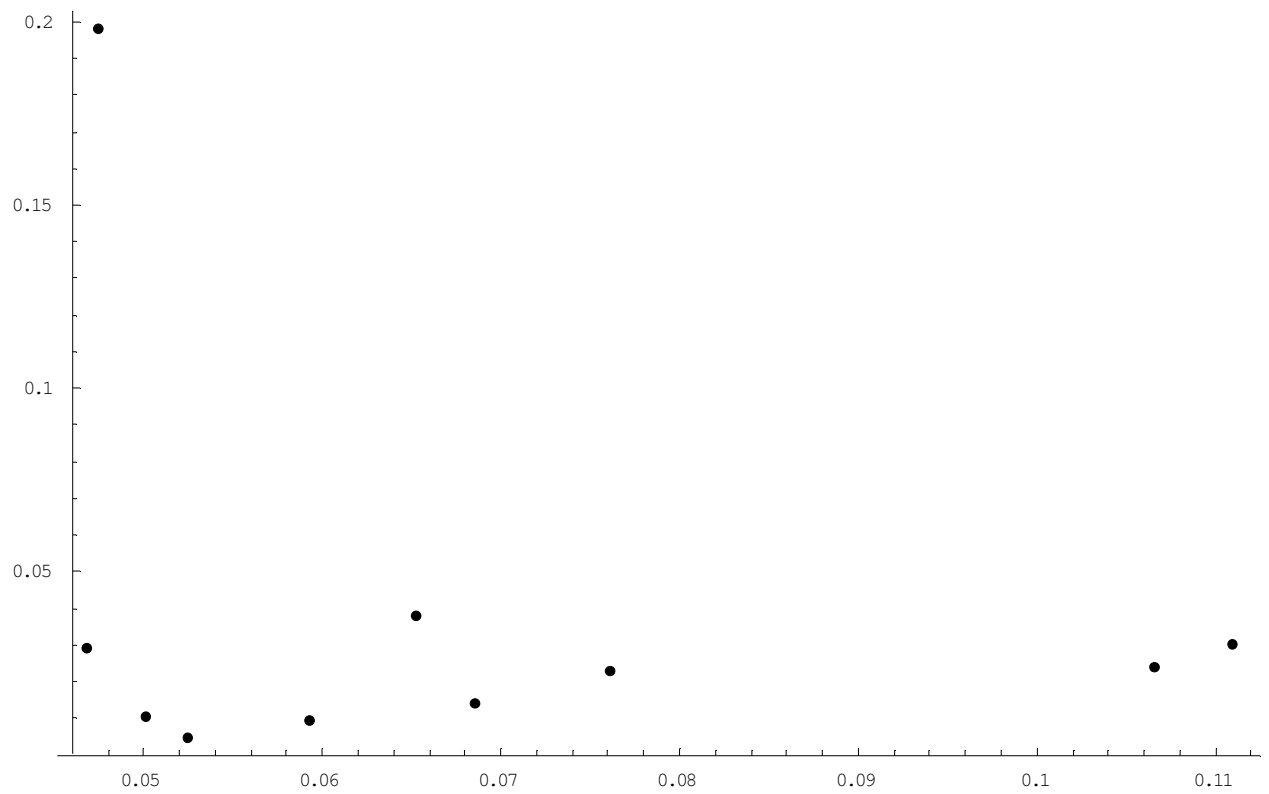
3) γεωμετρικός μέσος - d_2



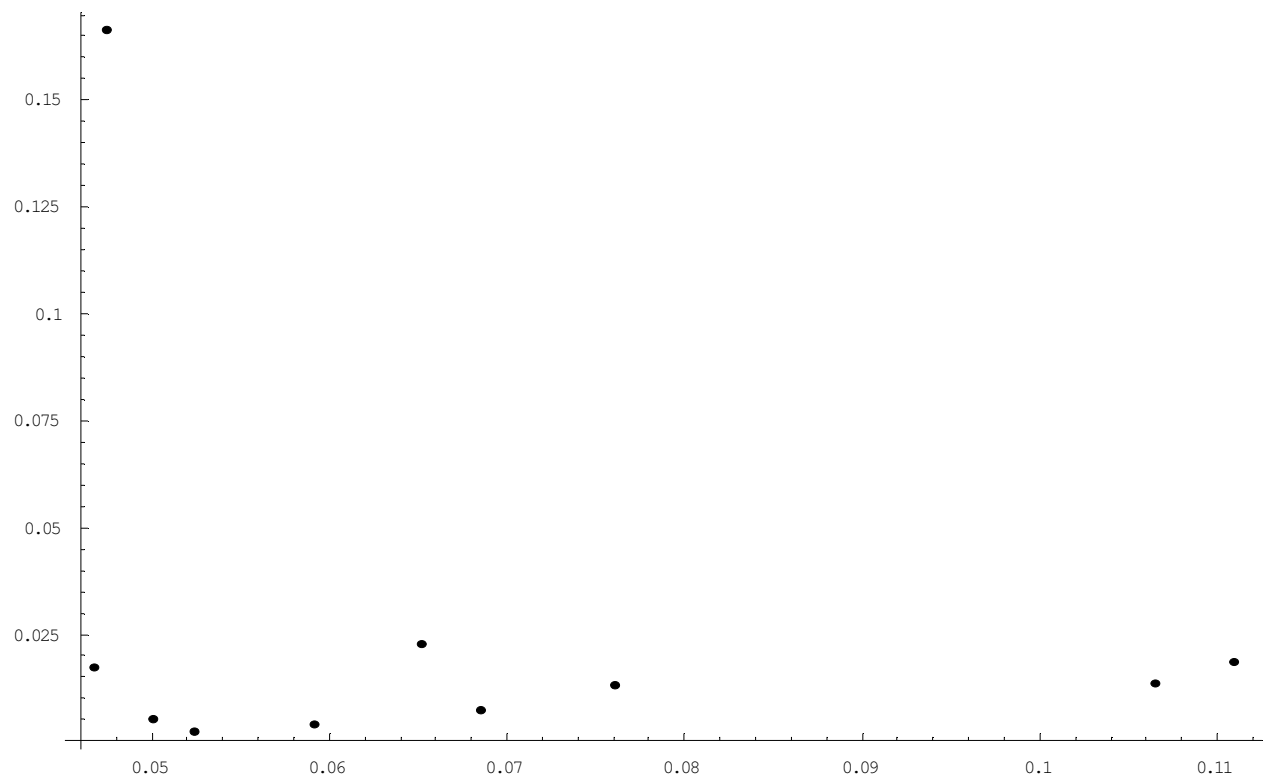
4) γεωμετρικός μέσος - d_3



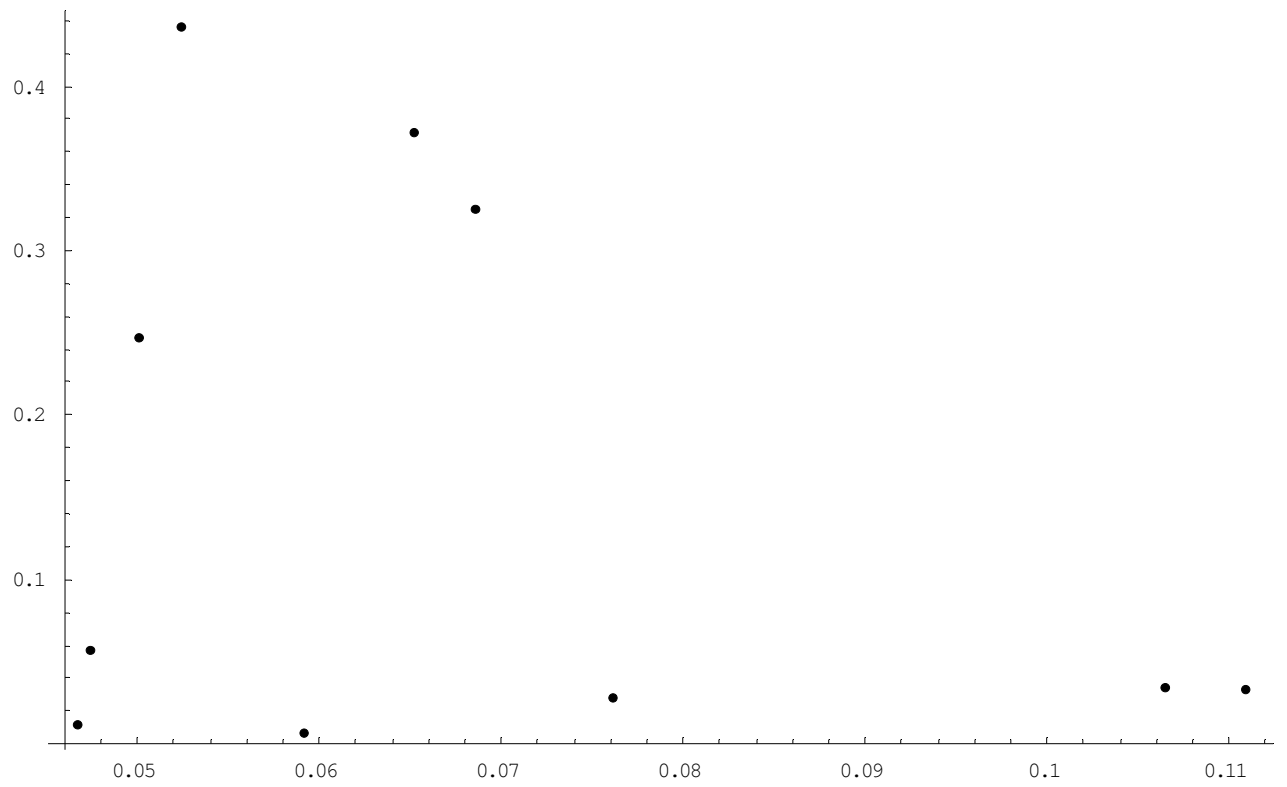
5) γεωμετρικός μέσος - d_4



6) γεωμετρικός μέσος - d_5

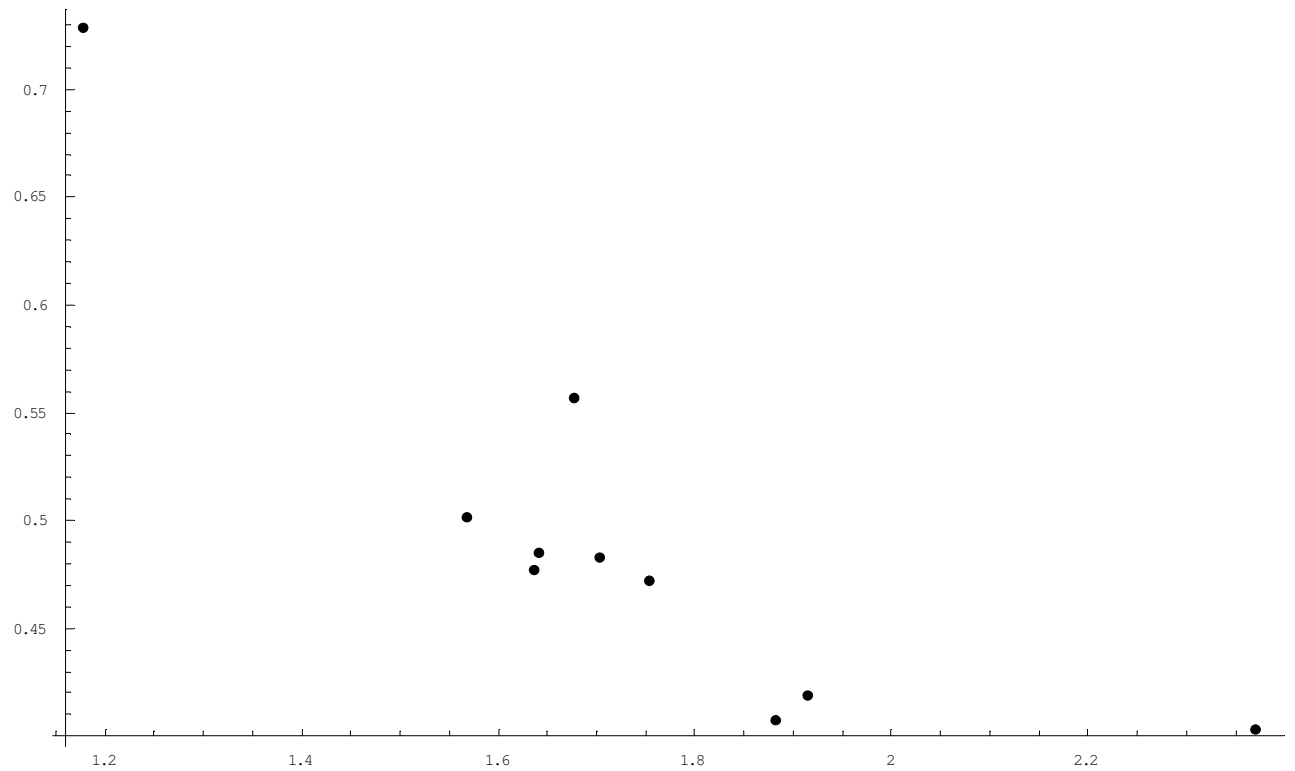


7) γεωμετρικός μέσος – d-distance

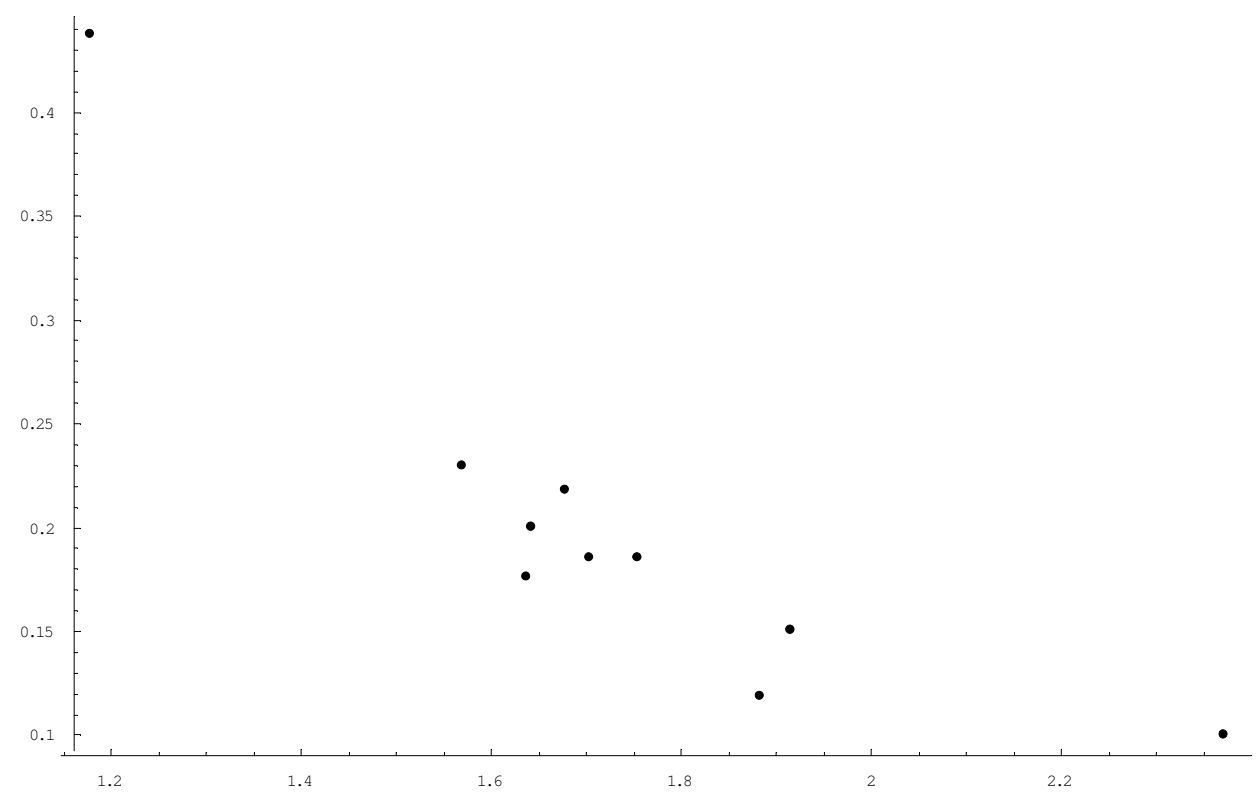


V. Διαγράμματα $1/\max(|\Lambda_i|) - d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d\text{-distance}$

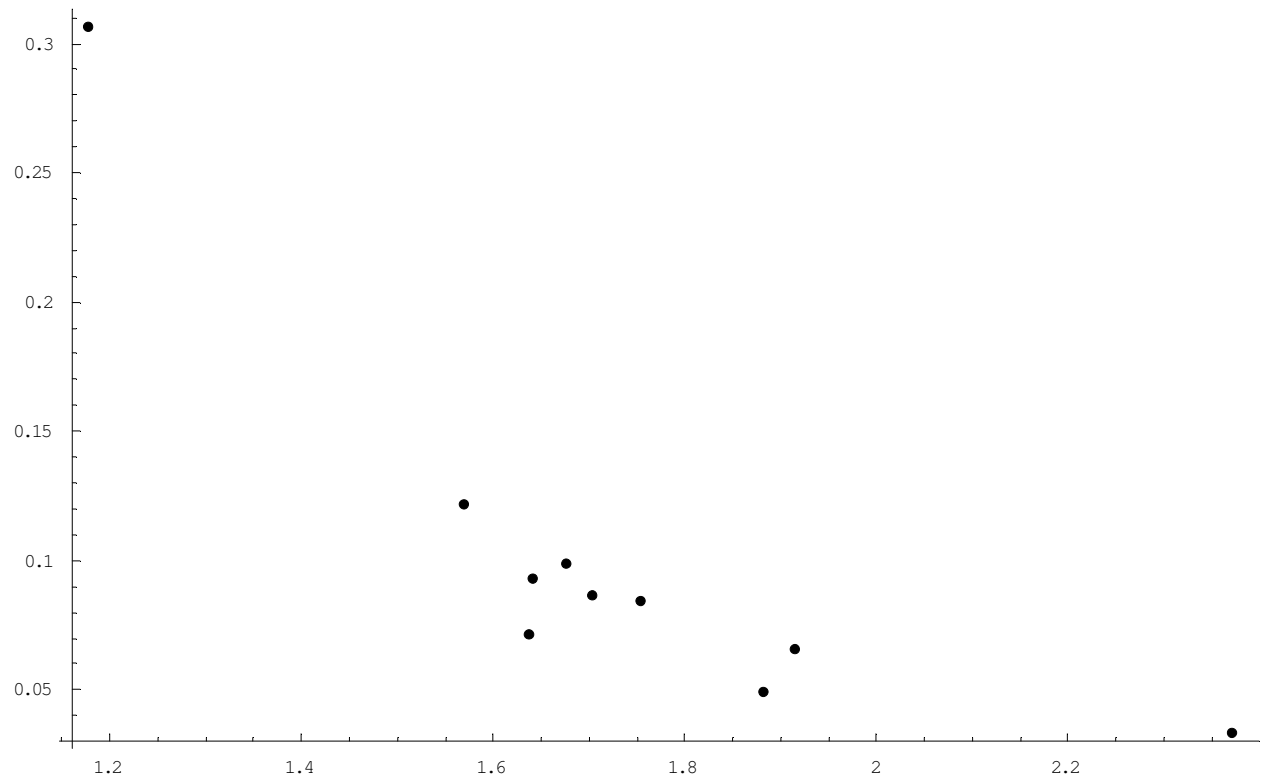
1) $1/\max(|\Lambda_i|) - d_0$



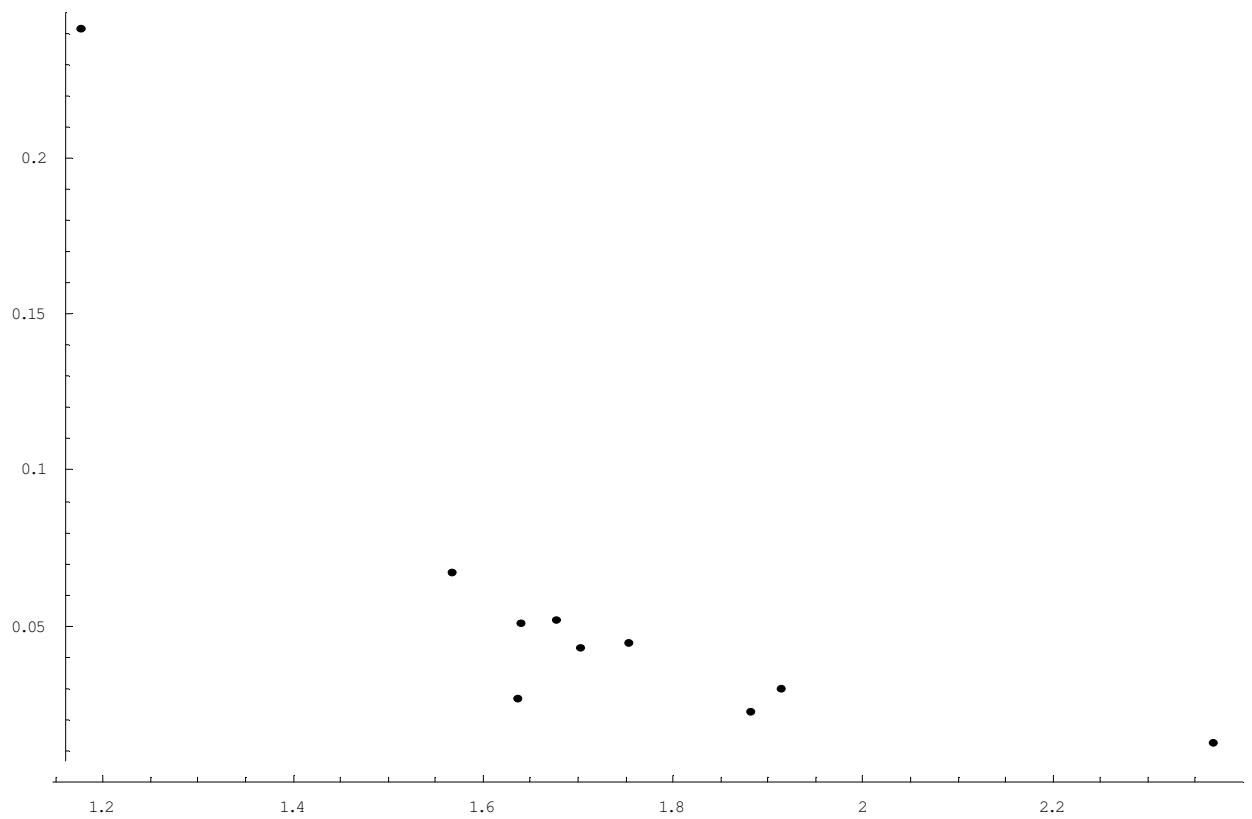
2) $1/\max(|\Lambda_i|) - d_1$



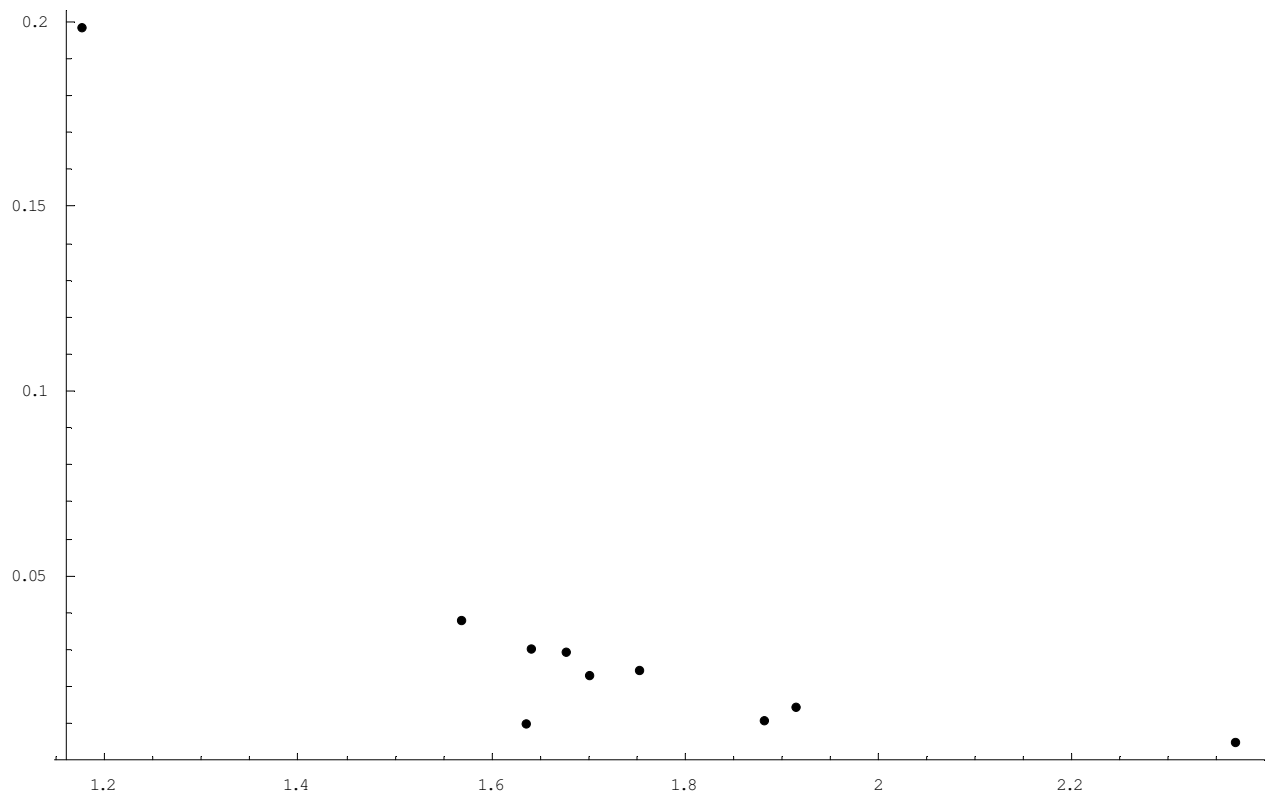
3) $1/\max(|\Lambda_i|) - d_2$



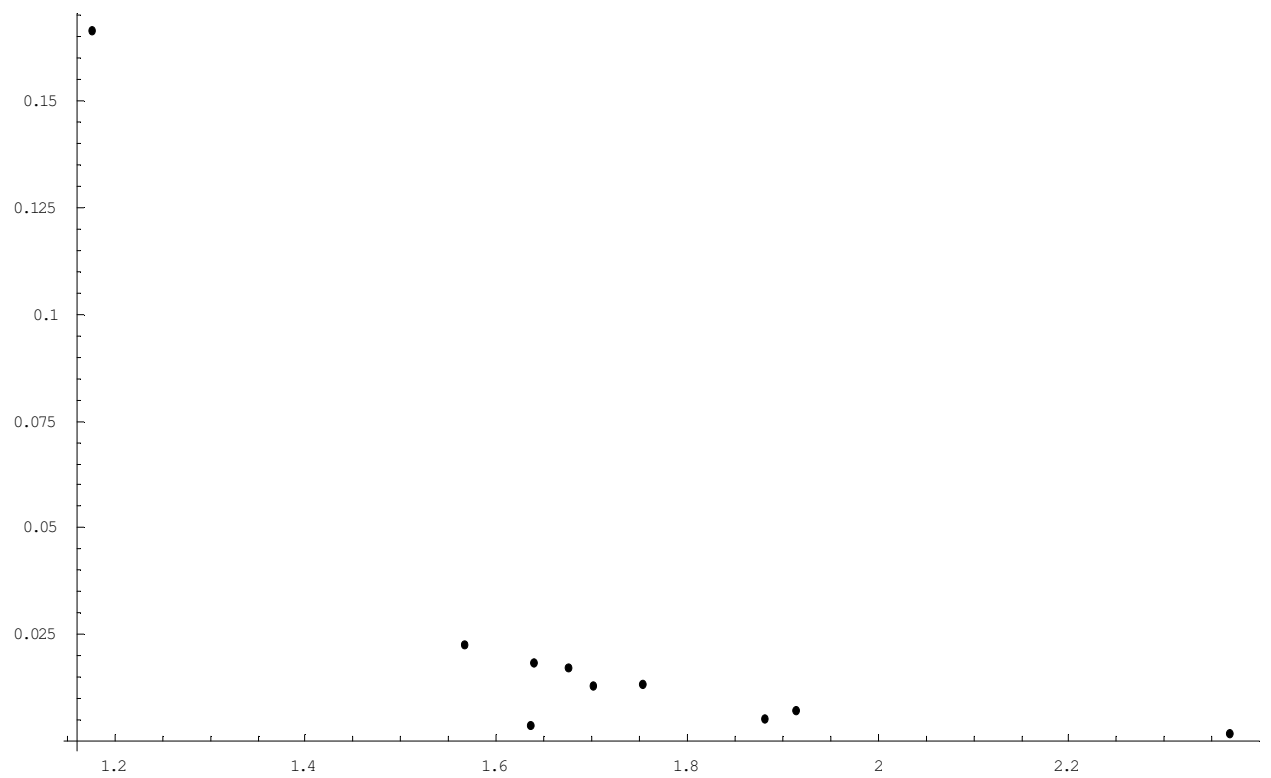
4) $1/\max(|\Lambda_i|) - d_3$



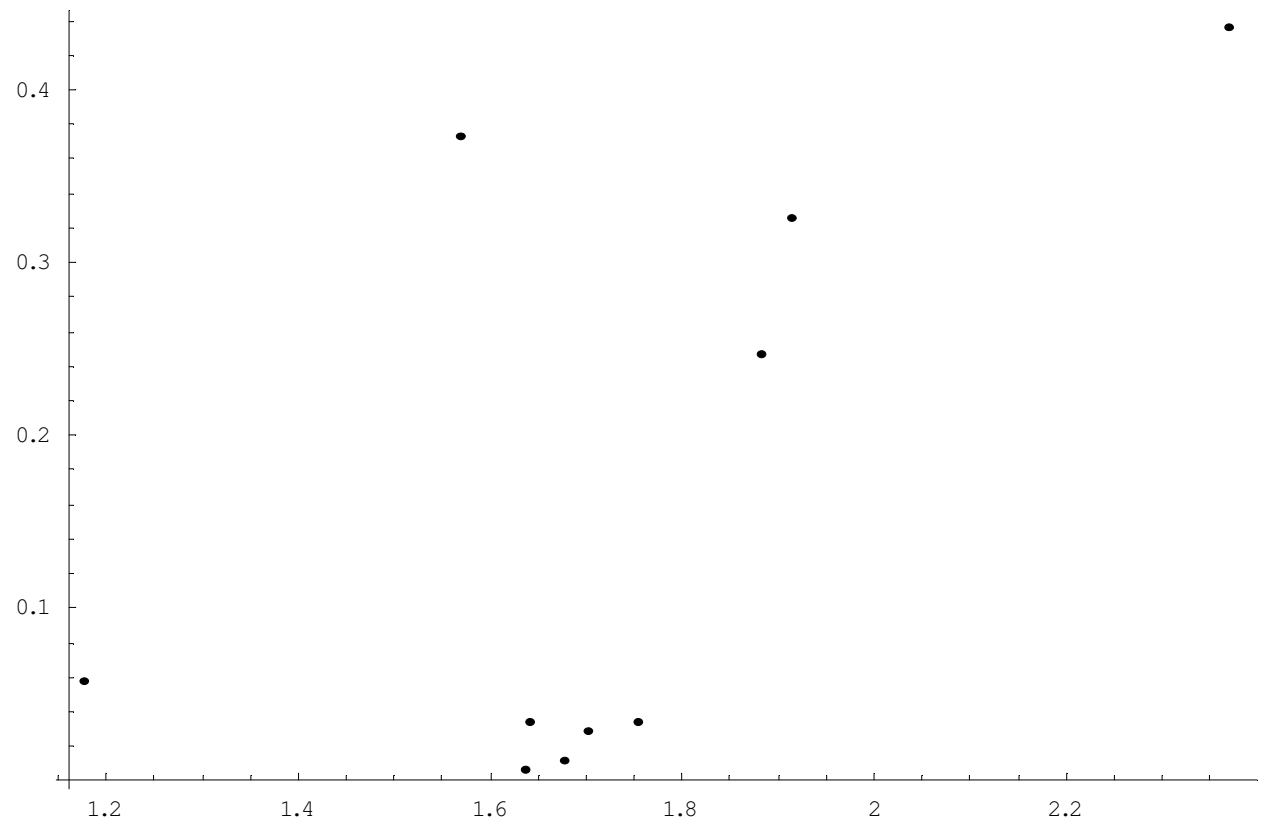
5) $1/\max(|\Lambda_i|) - d_4$



6) $1/\max(|\Lambda_i|) - d_5$

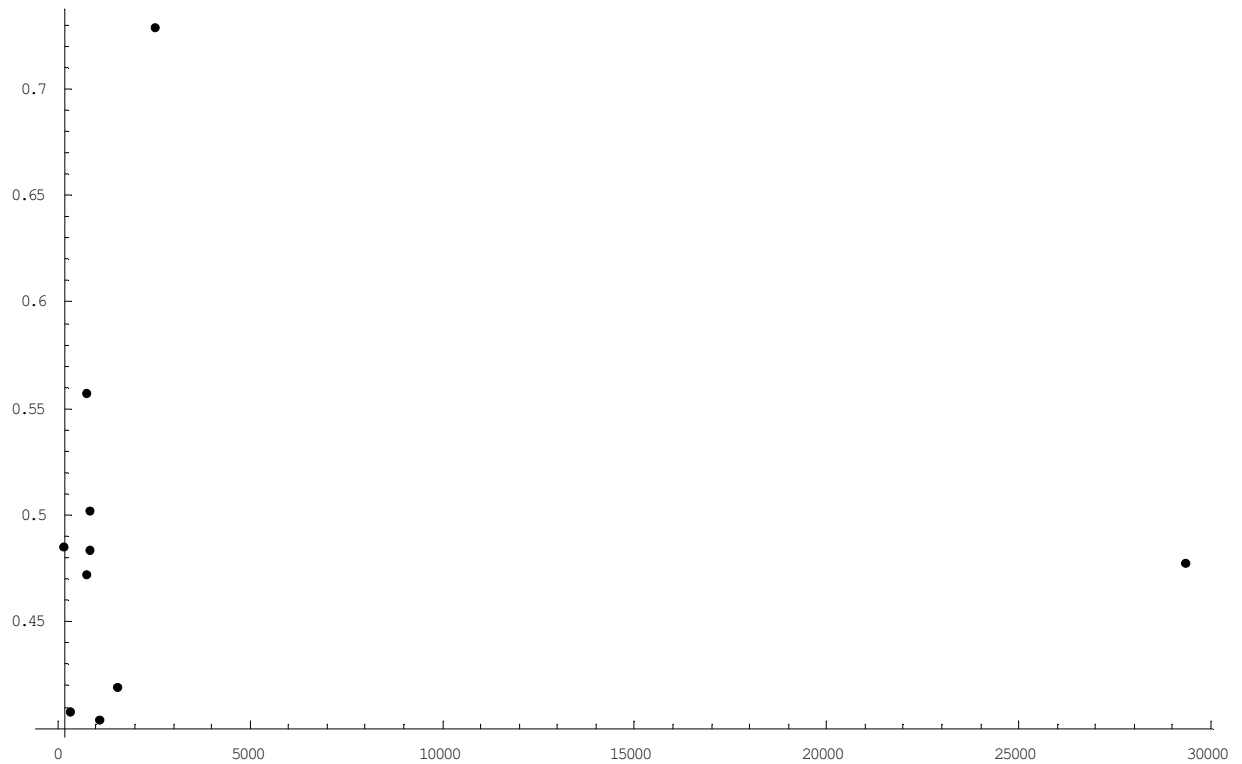


7) $1/\max(|\Lambda_i|)$ - d-distance

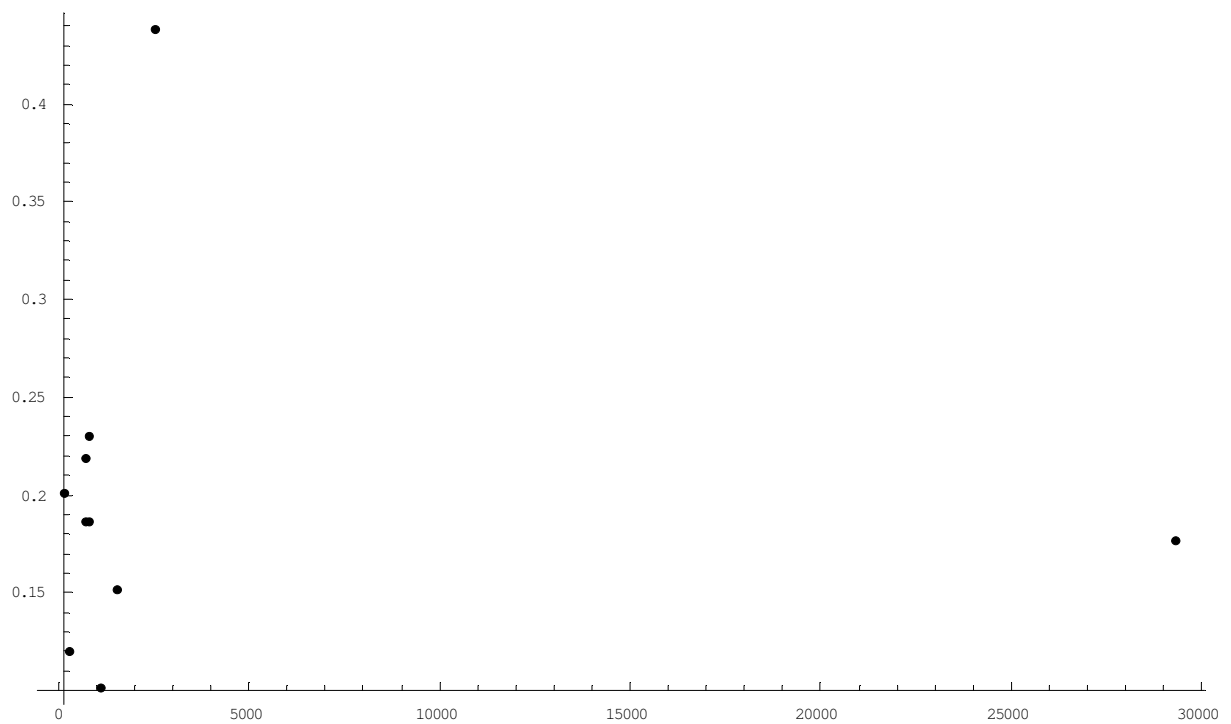


VI. Διαγράμματα $1/\min(|\Lambda_i|) - d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d$ -distance

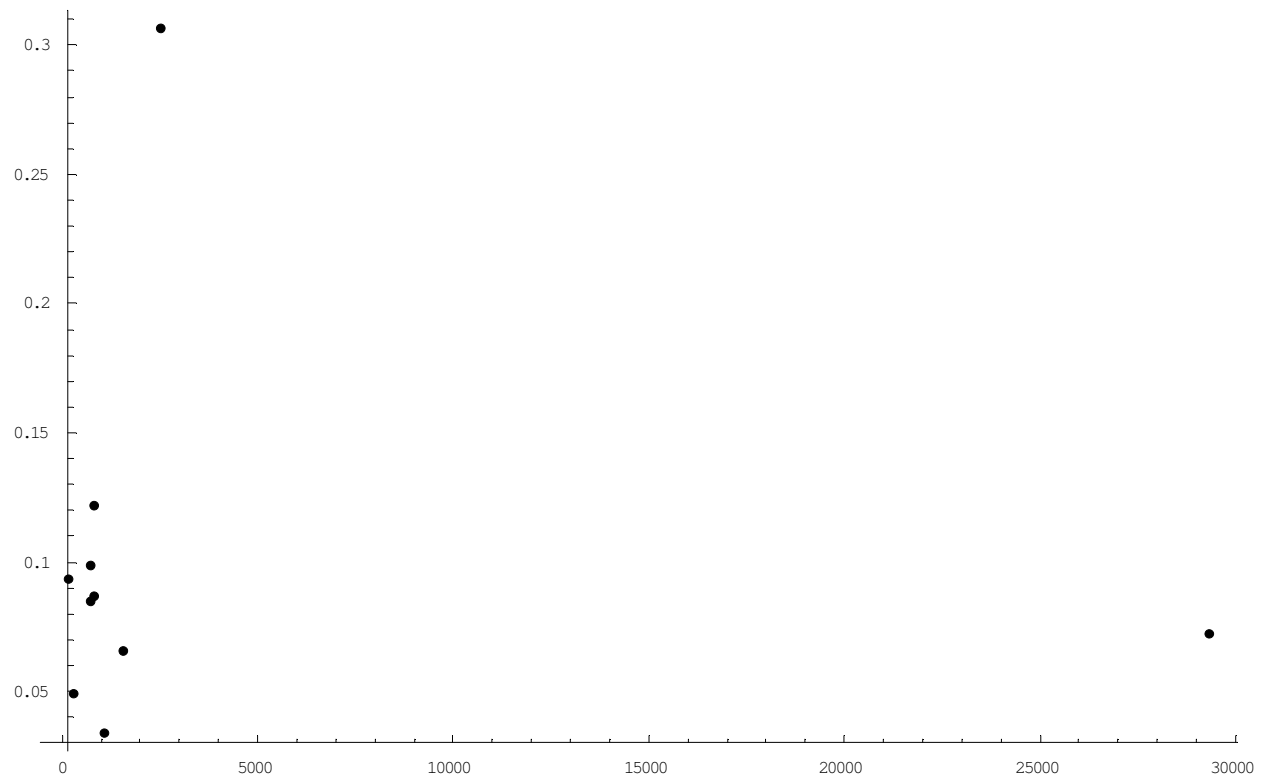
1) $1/\min(|\Lambda_i|) - d_0$



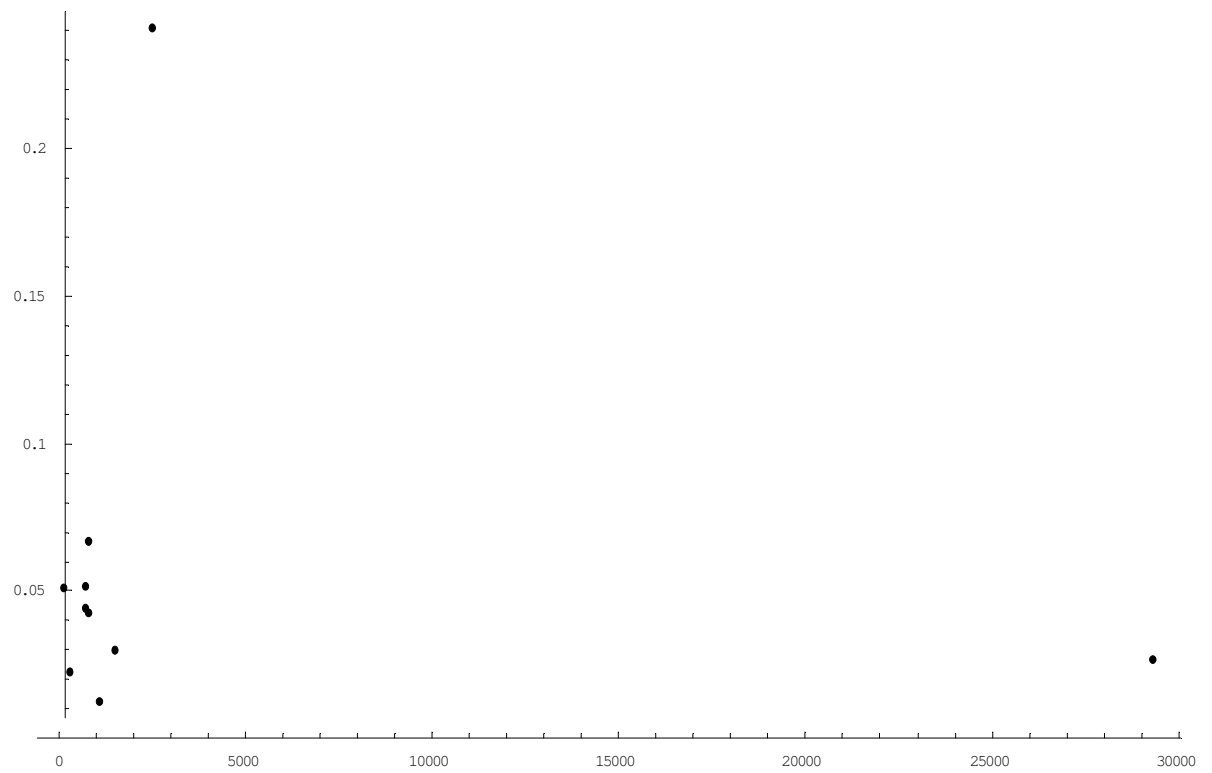
2) $1/\min(|\Lambda_i|) - d_1$



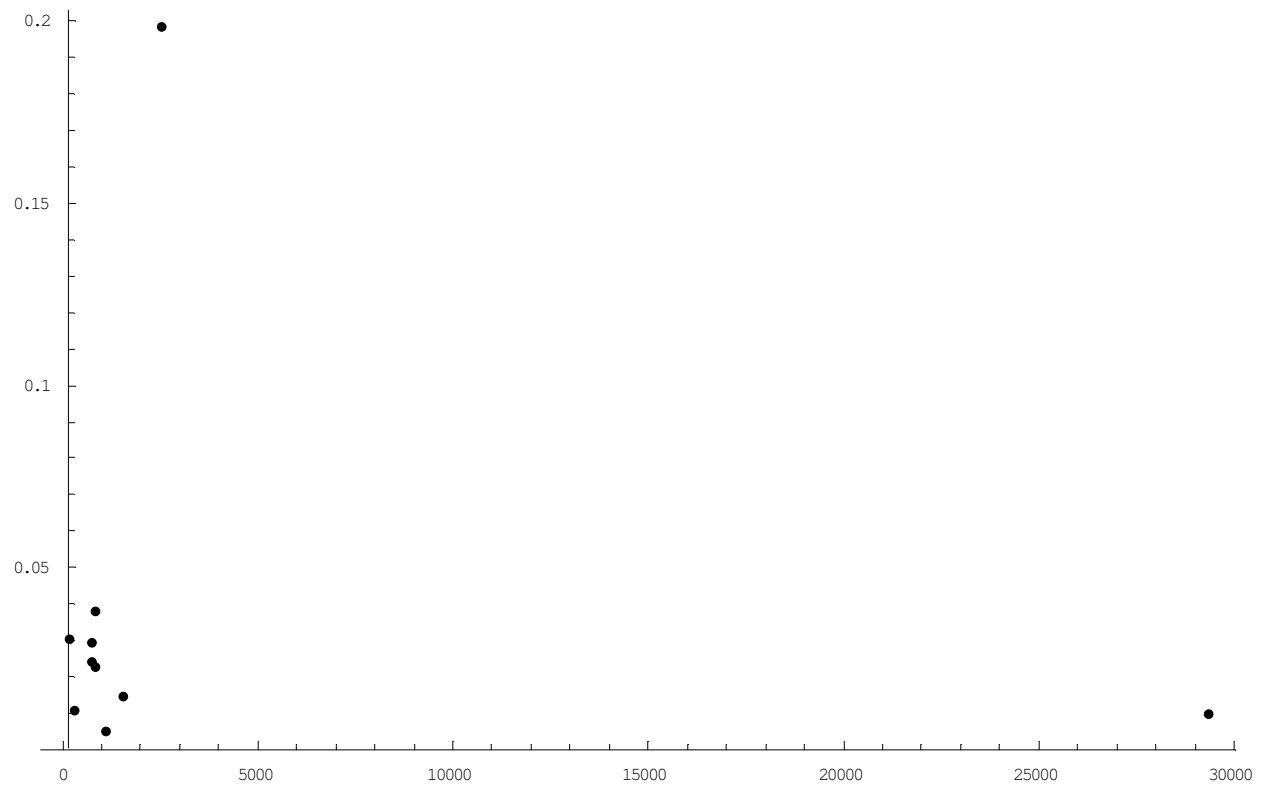
3) $1/\min(|\Lambda_i|) - d_2$



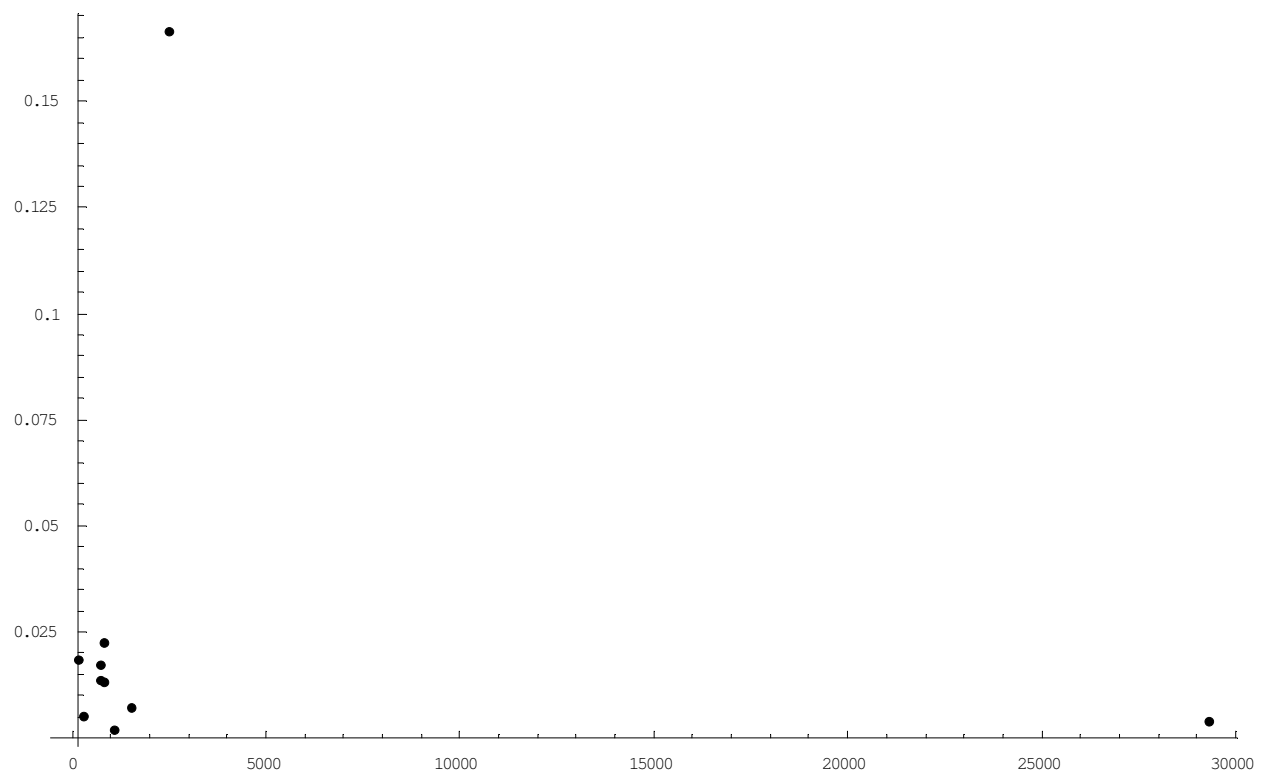
4) $1/\min(|\Lambda_i|) - d_3$



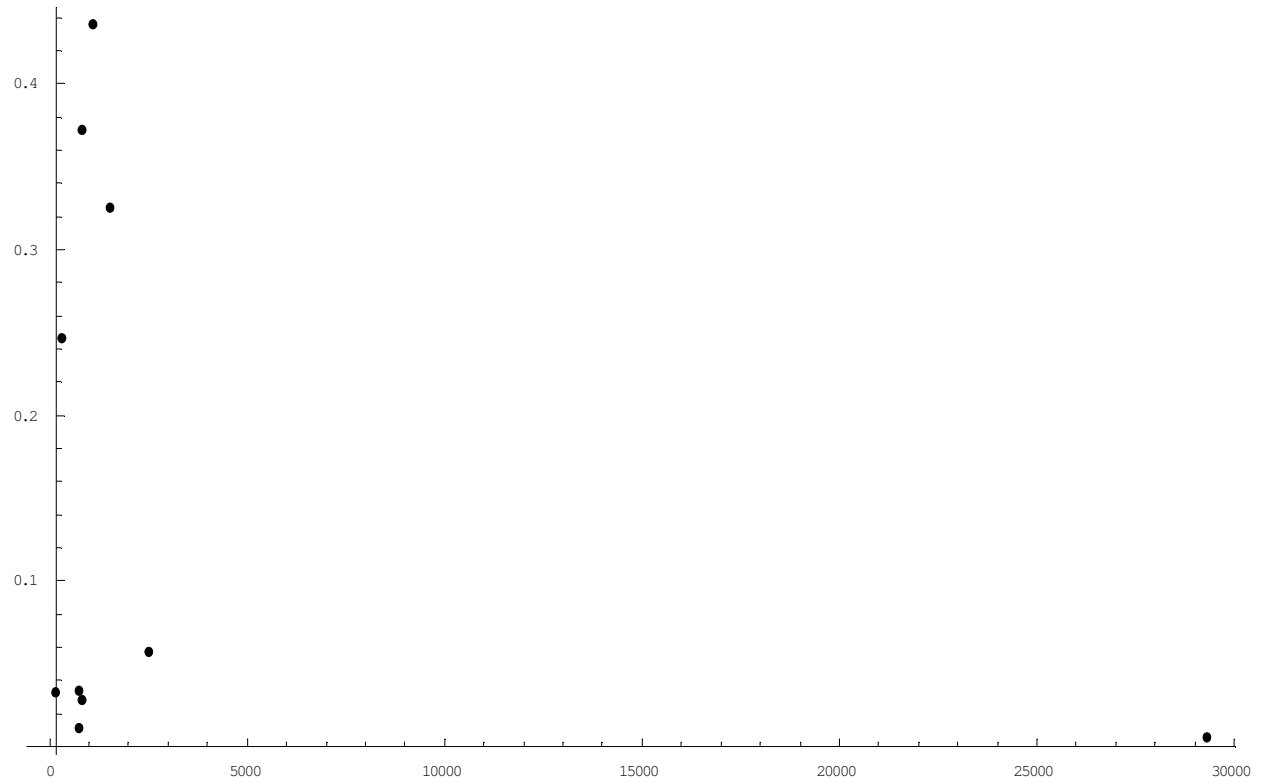
5) $1/\min(|\Lambda_i|) - d_4$



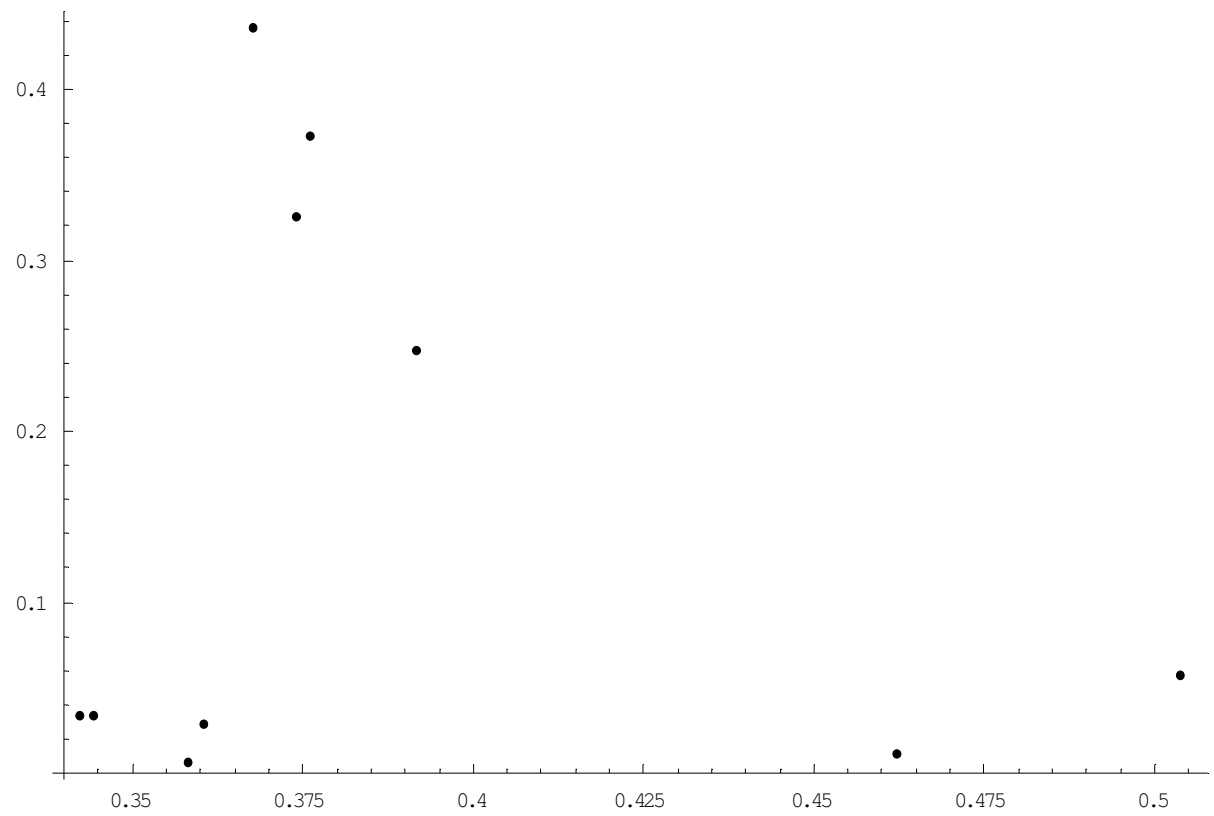
6) $1/\min(|\Lambda_i|) - d_5$



7) $1/\min(|\Lambda_i|)$ - d-distance



VII. Διάγραμμα ρ - d-distance



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Παλινδρομήσεις

1) Έχοντας λάβει ως δείγμα τις παρατηρήσεις: της Σουηδίας 1995 και 2005, της Γερμανίας 2000 και 2002 και της Δανίας 2000 για τα μεγέθη $1/\mu_i - d_0$

Y=d0	X= 1/μi
0,407585	10,1936
0,403634	10,1224
0,419127	8,45959
0,47238	5,60991
0,485268	5,62498

ΕΞΟΔΟΣ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΣ

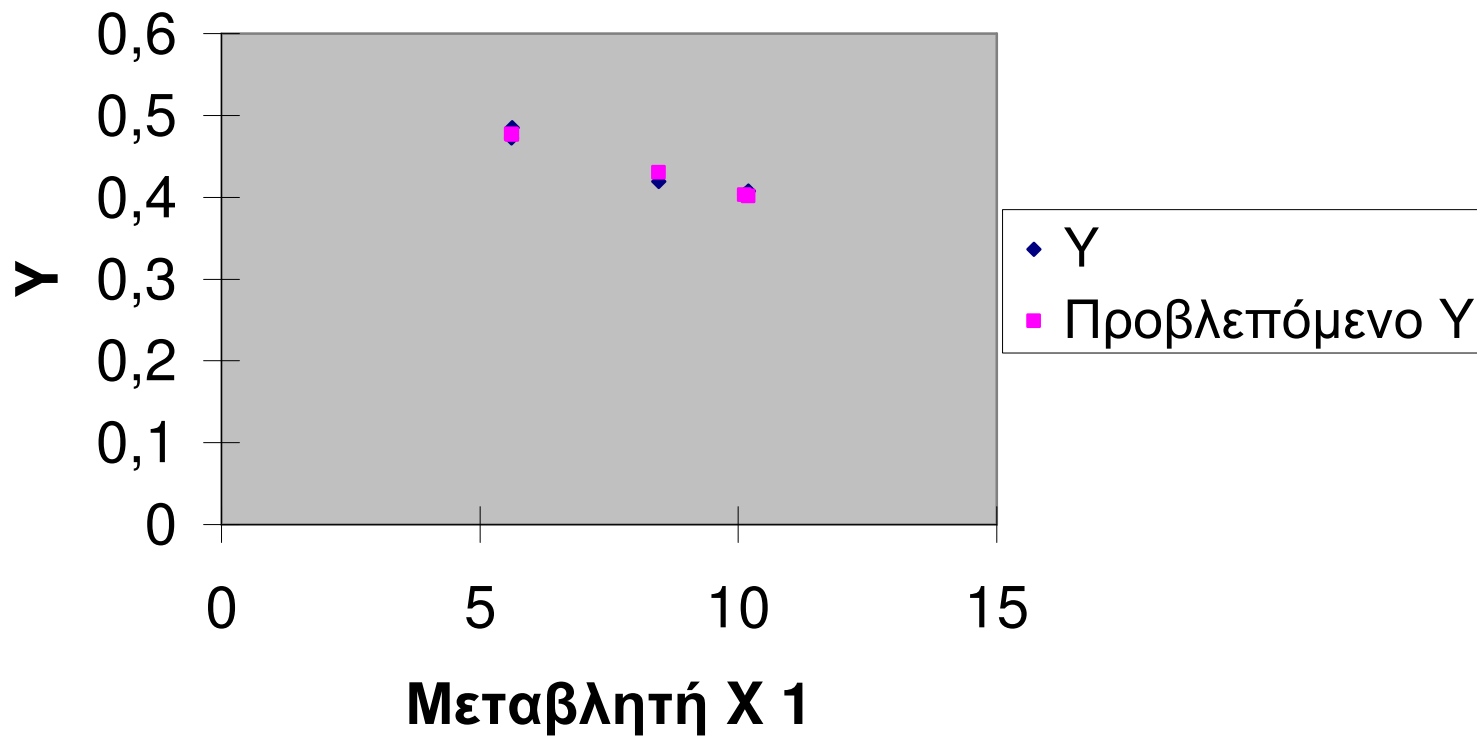
Στατιστικά παλινδρόμησης	
Πολλαπλό R	0,978387289
R Τετράγωνο	0,957241687
Προσαρμοσμένο R Τετράγωνο	0,942988916
Τυπικό σφάλμα	0,009152809
Μέγεθος δείγματος	5

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

	βαθμοί ελευθερίας	SS	MS	F	Σημαντικότητα F
Παλινδρόμηση	1	0,005626406	0,005626	67,16179	0,003801761
Υπόλοιπο	3	0,000251322	8,38E-05		
Σύνολο	4	0,005877728			

	Συντελεστές	Τυπικό σφάλμα	t	τιμή-P	Κατώτερο 95%	Υψηλότερο 95%	Κατώτερο 95,0%	Υψηλότερο 95,0%
Τεταγμένη επί την αρχή	0,568953174	0,016542562	34,39329	5,4E-05	0,516307358	0,62159899	0,516307358	0,62159899
Μεταβλητή X 1	-0,016414996	0,002002994	-8,19523	0,003802	-0,02278942	-0,010040575	-0,022789417	-0,010040575

Μεταβλητή X 1 Διάγραμμα προσαρμογής γραμμής



2) Έχοντας λάβει ως δείγμα τις παρατηρήσεις: της Σουηδίας 1995 και 2005, της Γερμανίας 2000 και 2002, της Γαλλίας 1995 και 2005 και της Δανίας 2000 για τα μεγέθη $1/\mu_i - d_i$

Y=d1	X= 1/μi
0,186393	5,60991
0,200973	5,62498
0,176878	7,60578
0,151149	8,45959
0,119597	10,1936
0,100909	10,1224
0,18644	7,81515

ΕΞΟΔΟΣ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΣ

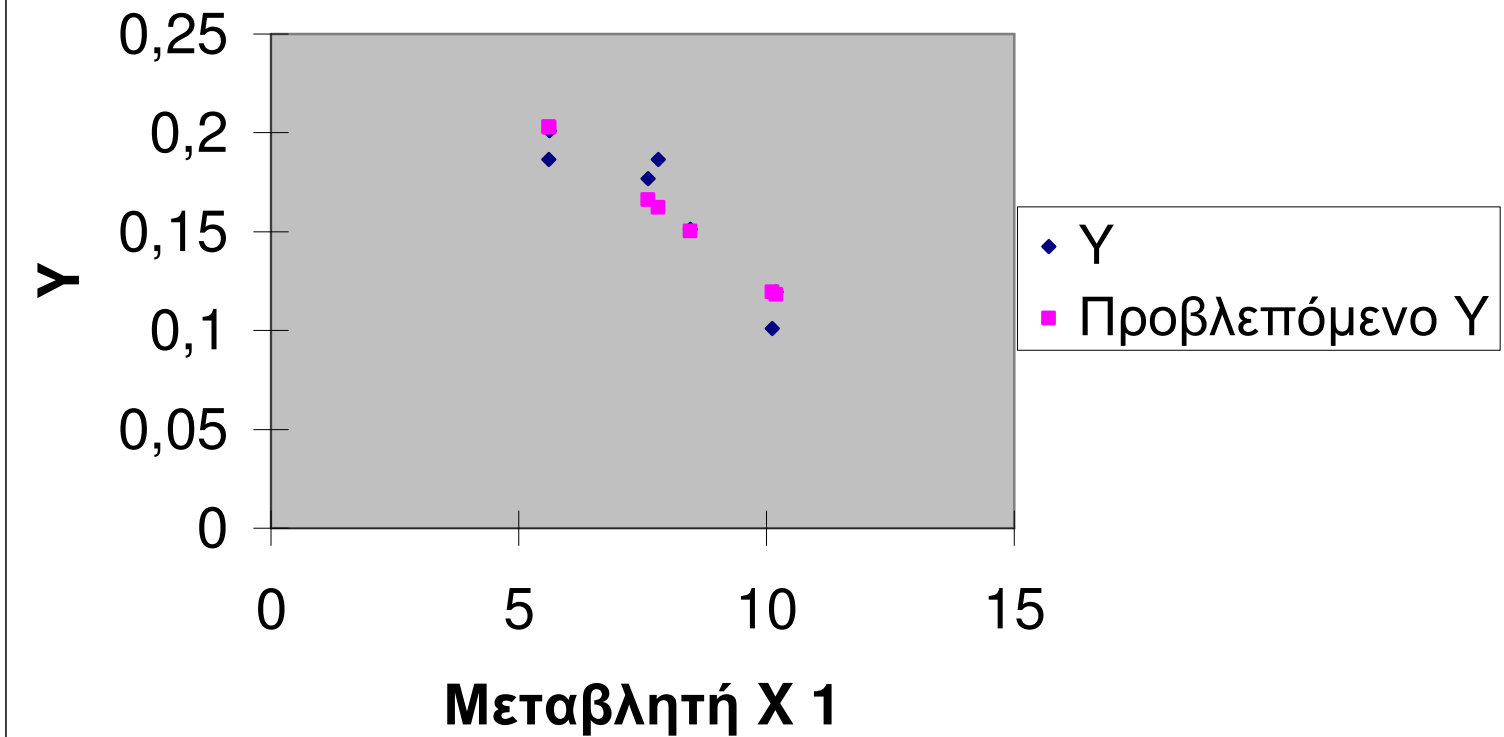
<i>Στατιστικά παλινδρόμησης</i>	
Πολλαπλό R	0,918923094
R Τετράγωνο	0,844419652
Προσαρμοσμένο R Τετράγωνο	0,813303583
Τυπικό σφάλμα	0,016321319
Μέγεθος δείγματος	7

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

	<i>βαθμοί ελευθερίας</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Σημαντικότητα F</i>
Παλινδρόμηση	1	0,007229098	0,007229098	27,1377351	0,003440075
Υπόλοιπο	5	0,001331927	0,000266385		
Σύνολο	6	0,008561025			

	<i>Συντελεστές</i>	<i>Τυπικό σφάλμα</i>	<i>t</i>	<i>τιμή-P</i>	<i>Κατώτερο 95%</i>	<i>Υψηλότερο 95%</i>	<i>Κατώτερο 95,0%</i>	<i>Υψηλότερο 95,0%</i>
Τεταγμένη επί την αρχή	0,307172276	0,028854354	10,6456127	0,000126545	0,232999798	0,381344753	0,232999798	0,381344753
Μεταβλητή X 1	-0,018543041	0,003559542	-5,209389129	0,003440075	-0,027693136	-0,009392946	-0,027693136	-0,009392946

Μεταβλητή X 1 Διάγραμμα προσαρμογής γραμμής



3) Έχοντας λάβει ως δείγμα τις παρατηρήσεις: της Σουηδίας 1995 και 2005, της Γερμανίας 2000 και 2002, της Γαλλίας 2005 και της Δανίας 2000 για τα μεγέθη $1/\mu_i - d_4$

Y=d4	X=1/μi
0,0243148	5,60991
0,0302593	5,62498
0,0229299	7,81515
0,0143964	8,45959
0,0106478	10,1936
0,00493871	10,1224

ΕΞΟΔΟΣ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΣ

Στατιστικά παλινδρόμησης

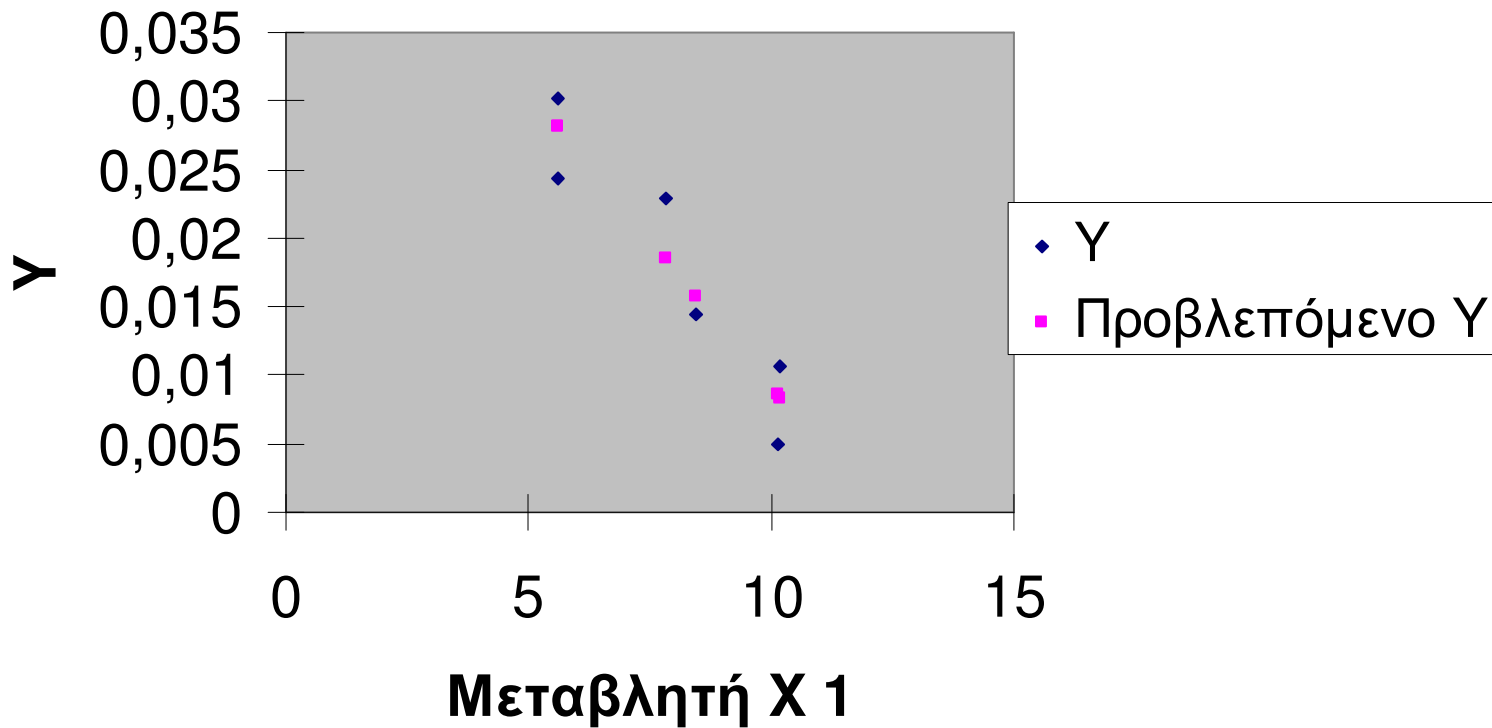
Πολλαπλό R	0,932275326
R Τετράγωνο	0,869137284
Προσαρμοσμένο R Τετράγωνο	0,836421605
Τυπικό σφάλμα	0,003845728
Μέγεθος δείγματος	6

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

	βαθμοί ελευθερίας	SS	MS	F	Σημαντικότητα F
Παλινδρόμηση	1	0,000392907	0,000392907	26,56638382	0,006724633
Υπόλοιπο	4	5,91585E-05	1,47896E-05		
Σύνολο	5	0,000452065			

	Συντελεστές	Τυπικό σφάλμα	t	τιμή-P	Κατώτερο 95%	Υψηλότερο 95%	Κατώτερο 95,0%	Υψηλότερο 95,0%
Τεταγμένη επί την αρχή	0,052466771	0,006885035	7,620407724	0,001592045	0,033350851	0,071582692	0,033350851	0,071582692
Μεταβλητή X 1	-0,004334783	0,00084101	-5,1542588	0,006724633	-0,006669801	-0,001999765	-0,006669801	-0,001999765

Μεταβλητή X 1 Διάγραμμα προσαρμογής γραμμής



4) Έχοντας λάβει ως δείγμα τις παρατηρήσεις: της Σουηδίας 1995 και 2005, της Γερμανίας 2000 και 2002 και της Δανίας 2000 για τα μεγέθη $\sigma_i = d_3$

Y=d3	X= σi
0,0223746	0,116801
0,012555	0,100033
0,029938	0,119592
0,0442942	0,152475
0,0509082	0,153212

ΕΞΟΔΟΣ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΣ

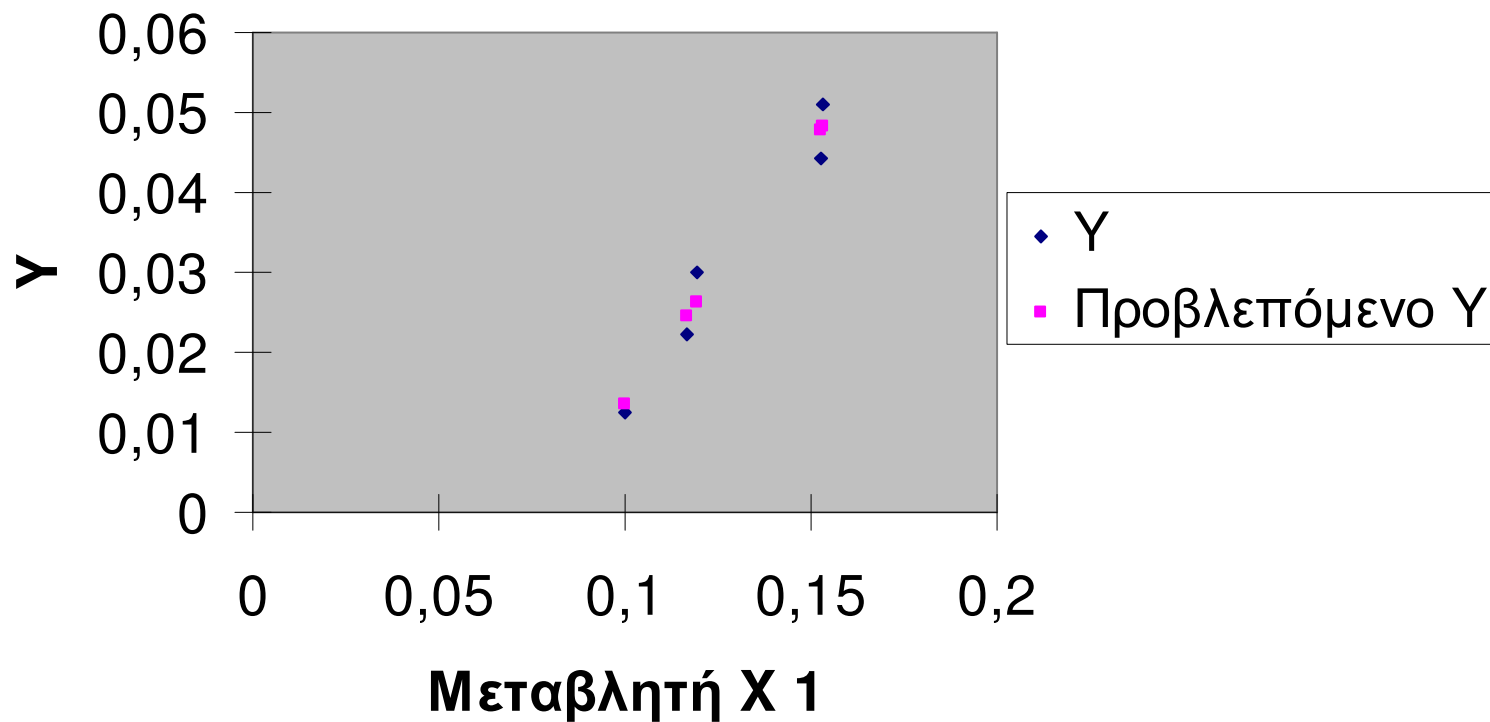
Στατιστικά παλινδρόμησης	
Πολλαπλό R	0,980632876
R Τετράγωνο	0,961640837
Προσαρμοσμένο R Τετράγωνο	0,948854449
Τυπικό σφάλμα	0,003546498
Μέγεθος δείγματος	5

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

	βαθμοί ελευθερίας	SS	MS	F	Σημαντικότητα F
Παλινδρόμηση	1	0,000945942	0,000946	75,208171	0,003226011
Υπόλοιπο	3	3,77329E-05	1,26E-05		
Σύνολο	4	0,000983675			

	Συντελεστές	Τυπικό σφάλμα	t	τιμή-P	Κατώτερο 95%	Υψηλότερο 95%	Κατώτερο 95,0%	Υψηλότερο 95,0%
Τεταγμένη επί την αρχή	-0,051966194	0,009812792	-5,29576	0,0131392	-0,083194878	-0,020737511	-0,083194878	-0,020737511
Μεταβλητή X 1	0,653936256	0,075405479	8,672264	0,003226	0,413962369	0,893910144	0,413962369	0,893910144

Μεταβλητή X 1 Διάγραμμα προσαρμογής γραμμής



5) Έχοντας λάβει ως δείγμα τις παρατηρήσεις: της Σουηδίας 1995 και 2005, της Γερμανίας 2000 και 2002, της Γαλλίας 1995 και της Δανίας 2000 για τα μεγέθη $\sigma_i - d_i$

Y=d1	X= σi
0,119597	0,116801
0,100909	0,100033
0,151149	0,119592
0,186393	0,152475
0,200973	0,153212
0,176878	0,146528

ΕΞΟΔΟΣ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΣ

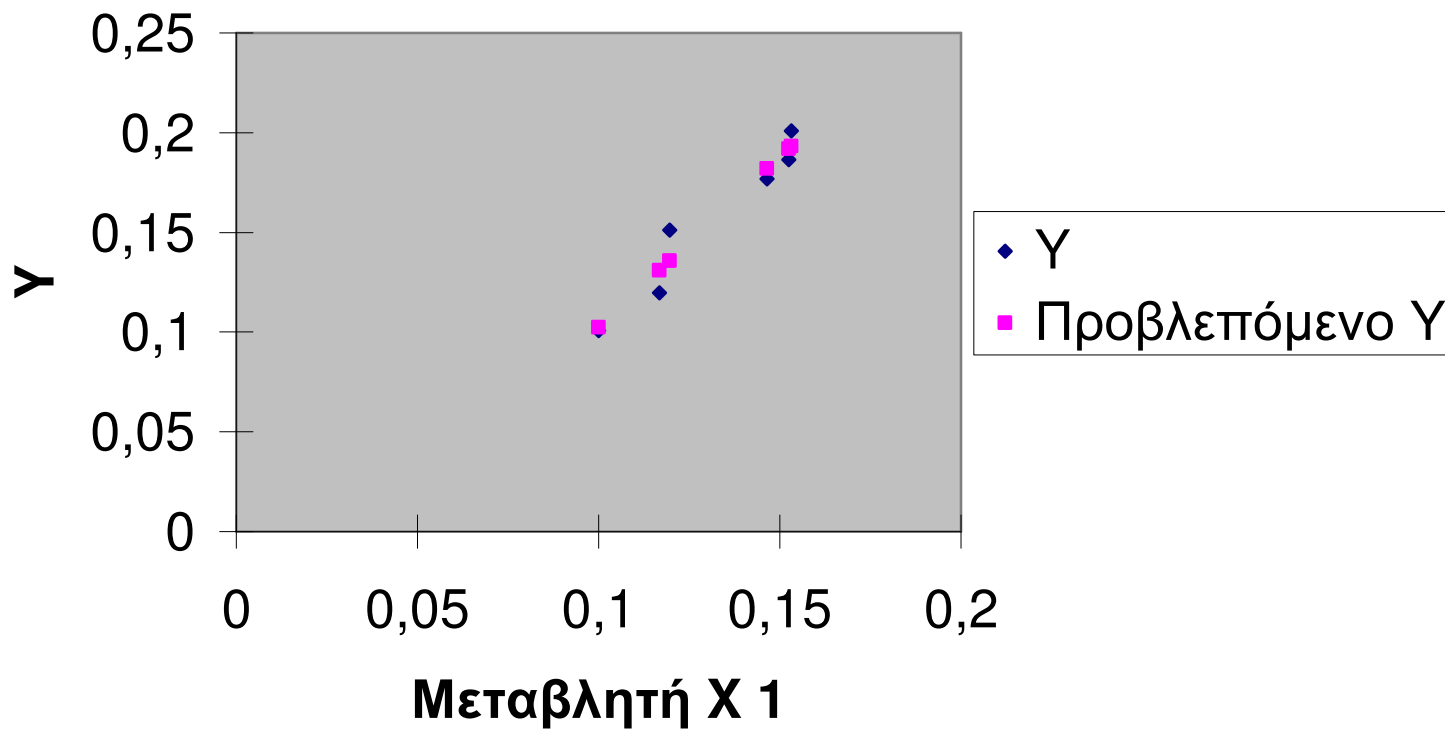
Στατιστικά παλινδρόμησης	
Πολλαπλό R	0,96834248
R Τετράγωνο	0,93768715
Προσαρμοσμένο R Τετράγωνο	0,92210894
Τυπικό σφάλμα	0,01099905
Μέγεθος δείγματος	6

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

	βαθμοί ελευθερίας	SS	MS	F	Σημαντικότητα F
Παλινδρόμηση	1	0,007282006	0,007282	60,19222	0,001487435
Υπόλοιπο	4	0,000483917	0,000121		
Σύνολο	5	0,007765923			

	Συντελεστές	Τυπικό σφάλμα	t	τιμή-P	Κατώτερο 95%	Υψηλότερο 95%	Κατώτερο 95,0%	Υψηλότερο 95,0%
Τεταγμένη επί την αρχή	-0,06901125	0,029345816	-2,35166	0,078374	-0,150488295	0,012465802	-0,150488295	0,012465802
Μεταβλητή X 1	1,71176299	0,220634512	7,758365	0,001487	1,09918338	2,3243426	1,09918338	2,3243426

Μεταβλητή X 1 Διάγραμμα προσαρμογής γραμμής



6) Έχοντας λάβει ως δείγμα τις παρατηρήσεις: της Σουηδίας 1995 και 2005, της Γερμανίας 2000 και 2002, της Γαλλίας 2005 και της Δανίας 2000 για τα μεγέθη $\sigma_i - d_4$

Y=d4	X= σ_i
0,0106478	0,116801
0,00493871	0,100033
0,0143964	0,119592
0,0243148	0,152475
0,0302593	0,153212
0,0229299	0,1229

ΕΞΟΔΟΣ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΣ

Στατιστικά παλινδρόμησης

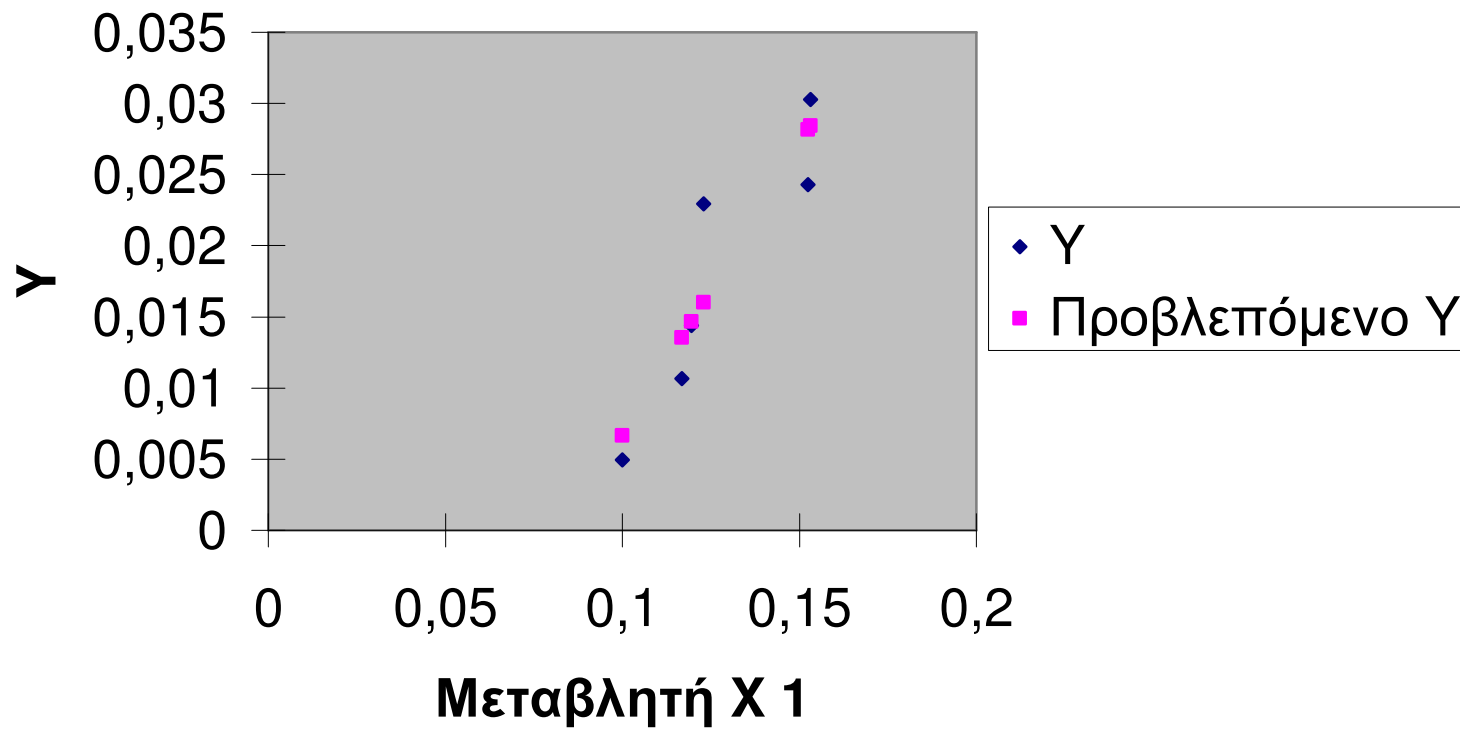
Πολλαπλό R	0,910947033
R Τετράγωνο	0,829824496
Προσαρμοσμένο R Τετράγωνο	0,78728062
Τυπικό σφάλμα	0,0043855
Μέγεθος δείγματος	6

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

	βαθμοί ελευθερίας	SS	MS	F	Σημαντικότητα F
Παλινδρόμηση	1	0,000375135	0,000375	19,50515	0,011542532
Υπόλοιπο	4	7,69304E-05	1,92E-05		
Σύνολο	5	0,000452065			

	Συντελεστές	Τυπικό σφάλμα	t	πιμή-P	Κατώτερο 95%	Υψηλότερο 95%	Κατώτερο 95,0%	Υψηλότερο 95,0%
Τεταγμένη επί την αρχή	-0,034293116	0,011955946	-2,86829	0,045547	-0,067488144	-0,001098089	-0,067488144	-0,001098089
Μεταβλητή X 1	0,409464422	0,092713201	4,416463	0,011543	0,15205131	0,666877535	0,15205131	0,666877535

Μεταβλητή X 1 Διάγραμμα προσαρμογής γραμμής



7) Έχοντας λάβει ως δείγμα τις παρατηρήσεις: της Σουηδίας 1995 και 2005, της Γερμανίας 2000 και 2002 και της Δανίας 2000 για τα μεγέθη $\varepsilon(\Lambda) = d_1$

Y=d1	X= $\varepsilon(\Lambda)$
0,119597	0,8281
0,100909	0,849085
0,151149	0,870247
0,186393	0,899935
0,200973	0,900327

ΕΞΟΔΟΣ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΣ

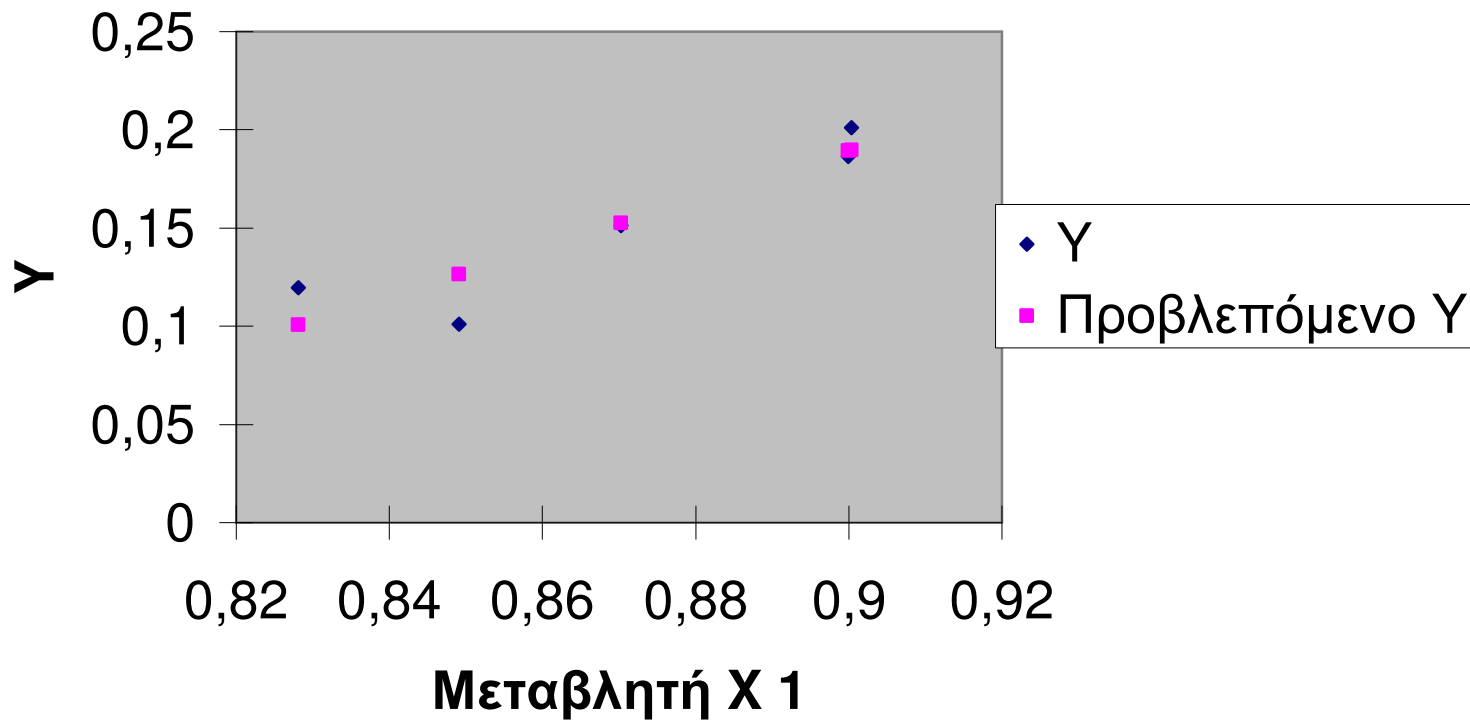
Στατιστικά παλινδρόμησης	
Πολλαπλό R	0,91700371
R Τετράγωνο	0,840895804
Προσαρμοσμένο R Τετράγωνο	0,787861073
Τυπικό σφάλμα	0,01959791
Μέγεθος δείγματος	5

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

	βαθμοί ελευθερίας	SS	MS	F	Σημαντικότητα F
Παλινδρόμηση	1	0,006089776	0,00609	15,85557	0,028342619
Υπόλοιπο	3	0,001152234	0,000384		
Σύνολο	4	0,00724201			

	Συντελεστές	Τυπικό σφάλμα	t	τιμή-P	Κατώτερο 95%	Υψηλότερο 95%	Κατώτερο 95,0%	Υψηλότερο 95,0%
Τεταγμένη επί την αρχή	-0,920042066	0,269321907	-3,41614	0,041961	-1,777144574	-0,062939557	-1,777144574	-0,062939557
Μεταβλητή X 1	1,232660654	0,309565554	3,981905	0,028343	0,247484901	2,217836407	0,247484901	2,217836407

Μεταβλητή X 1 Διάγραμμα προσαρμογής γραμμής



8) Έχοντας λάβει ως δείγμα τις παρατηρήσεις: της Σουηδίας 1995 και 2005, της Γερμανίας 2000 και 2002, της Γαλλίας 1995 και 2005 και της Δανίας 2000 για τα μεγέθη $\varepsilon(\Lambda) - d_3$

Y=d3	X= $\varepsilon(\Lambda)$
0,0223746	0,8281
0,029938	0,870247
0,0442942	0,899935
0,0509082	0,900327
0,0266772	0,855871
0,0426762	0,880323
0,012555	0,849085

ΕΞΟΔΟΣ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΣ

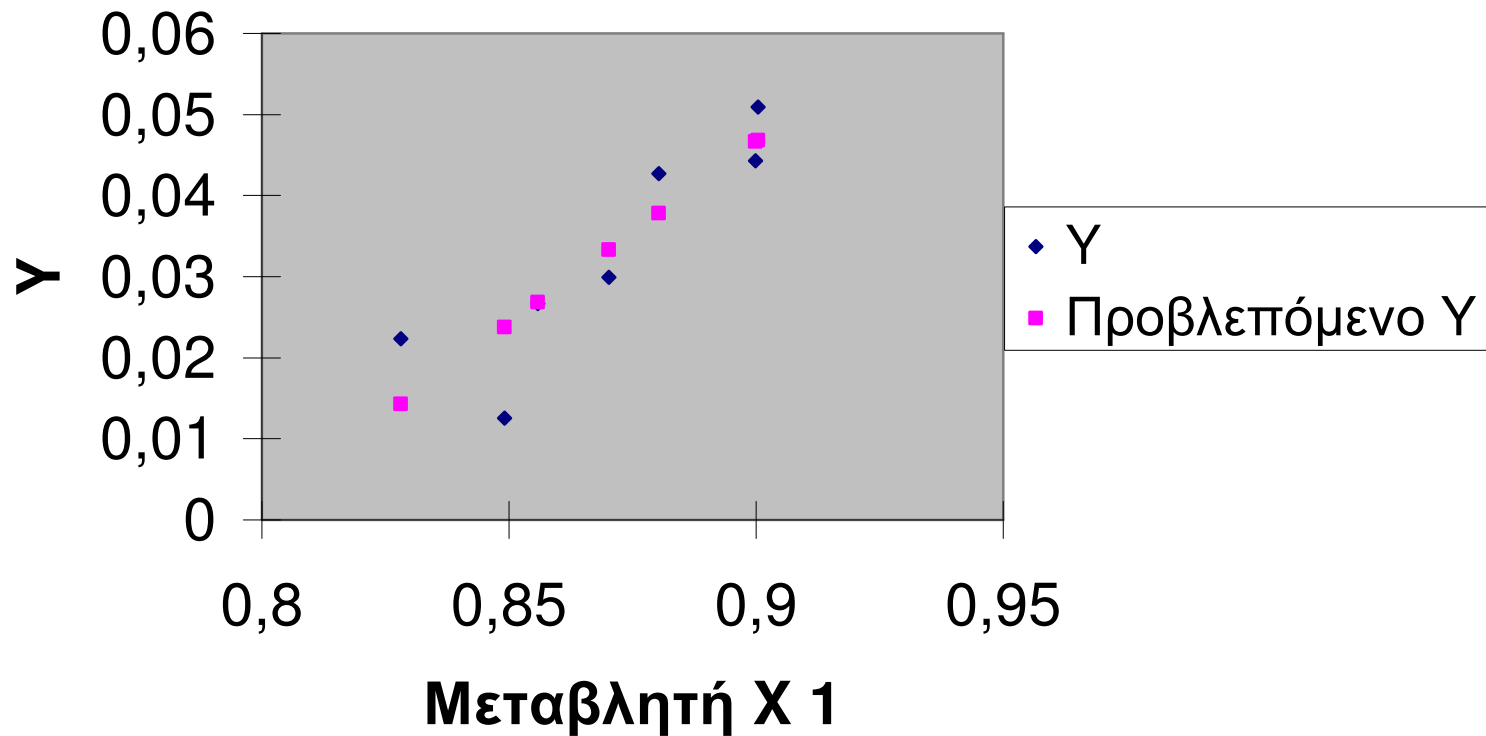
<i>Στατιστικά παλινδρόμησης</i>	
Πολλαπλό R	0,882801661
R Τετράγωνο	0,779338772
Προσαρμοσμένο R Τετράγωνο	0,735206527
Τυπικό σφάλμα	0,00703612
Μέγεθος δείγματος	7

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

	<i>βαθμοί ελευθερίας</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Σημαντικότητα F</i>
Παλινδρόμηση	1	0,000874252	0,000874252	17,6591688	0,008470926
Υπόλοιπο	5	0,000247535	4,9507E-05		
Σύνολο	6	0,001121787			

	<i>Συντελεστές</i>	<i>Τυπικό σφάλμα</i>	<i>t</i>	<i>τιμή-P</i>	<i>Κατώτερο 95%</i>	<i>Υψηλότερο 95%</i>	<i>Κατώτερο 95,0%</i>	<i>Υψηλότερο 95,0%</i>
Τεταγμένη επί την αρχή	-0,358672433	0,093189071	-3,84886798	0,01201493	-0,598222567	-0,119122299	-0,598222567	-0,119122299
Μεταβλητή X 1	0,450391333	0,107177814	4,202281377	0,00847093	0,174881991	0,725900676	0,174881991	0,725900676

Μεταβλητή X 1 Διάγραμμα προσαρμογής γραμμής



9) Έχοντας λάβει ως δείγμα τις παρατηρήσεις: της Σουηδίας 1995 και 2005, της Γερμανίας 2000 και 2002 και της Δανίας 2000 για τον γεωμετρικό μέσο - d_0

Y=d0	X= γεωμετρικός μέσος
0,407585	0,050059
0,403634	0,0523948
0,419127	0,0685443
0,47238	0,106464
0,485268	0,110864

ΕΞΟΔΟΣ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΣ

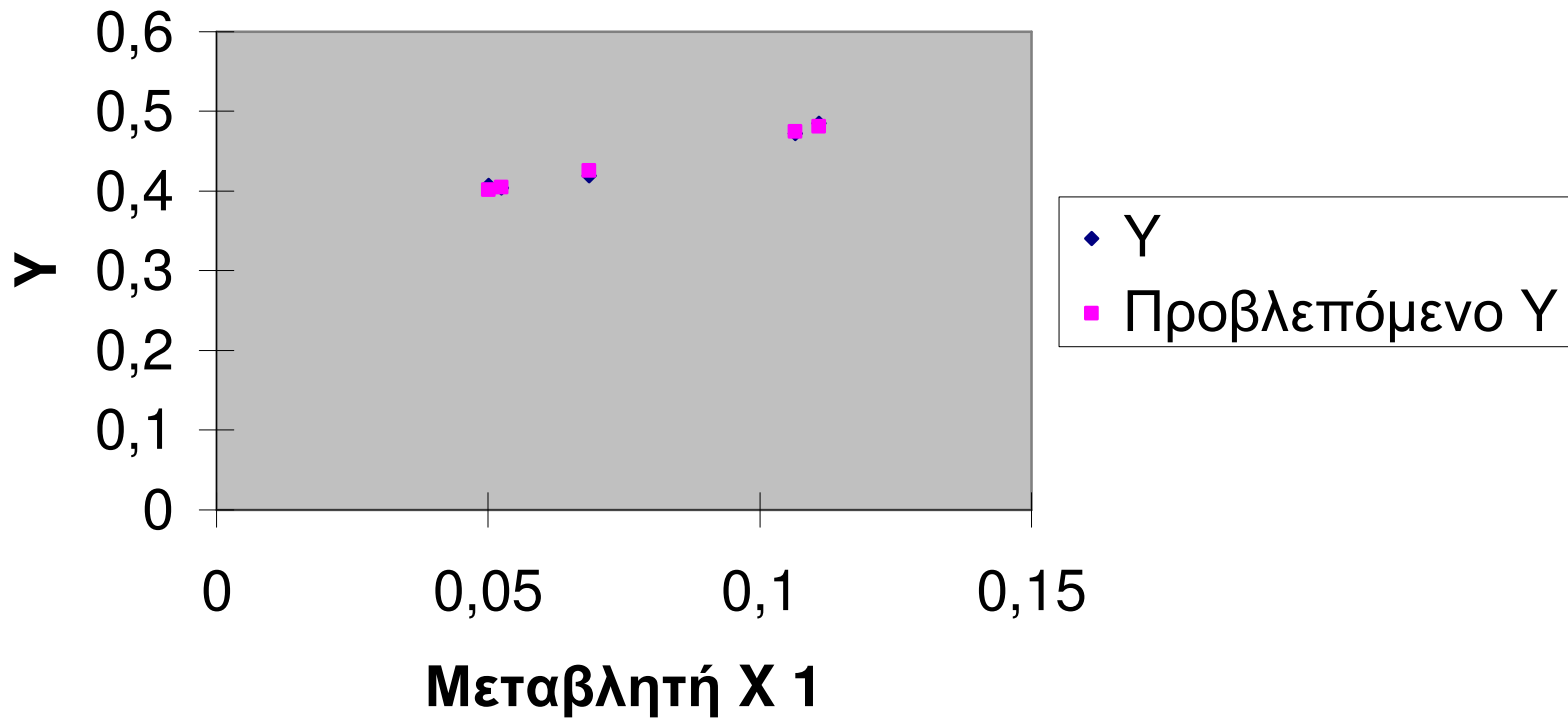
Στατιστικά παλινδρόμησης	
Πολλαπλό R	0,990863981
R Τετράγωνο	0,981811429
Προσαρμοσμένο R Τετράγωνο	0,975748572
Τυπικό σφάλμα	0,005969575
Μέγεθος δείγματος	5

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

	βαθμοί ελευθερίας	SS	MS	F	Σημαντικότητα F
Παλινδρόμηση	1	0,00577082	0,005771	161,9387425	0,001046823
Υπόλοιπο	3	0,000106907	3,56E-05		
Σύνολο	4	0,005877728			

	Συντελεστές	Τυπικό σφάλμα	t	τιμή-P	Κατώτερο 95%	Υψηλότερο 95%	Κατώτερο 95,0%	Υψηλότερο 95,0%
Τεταγμένη επί την αρχή	0,336644817	0,008370348	40,21873	3,38236E-05	0,310006633	0,363283002	0,310006633	0,363283002
Μεταβλητή X 1	1,299860898	0,102146031	12,72552	0,001046823	0,974786638	1,624935159	0,974786638	1,624935159

Μεταβλητή X 1 Διάγραμμα προσαρμογής γραμμής



10) Έχοντας λάβει ως δείγμα τις παρατηρήσεις: της Σουηδίας 1995 και 2005, της Γερμανίας 2000 και 2002, της Γαλλίας 1995 και 2005 και της Δανίας 2000 για τον γεωμετρικό μέσο - d_4

Y=d4	X= γεωμετρικός μέσος
0,0106478	0,050059
0,00975886	0,0591736
0,0143964	0,0685443
0,0243148	0,106464
0,0302593	0,110864
0,00493871	0,0523948
0,0229299	0,0760763

ΕΞΟΔΟΣ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΣ

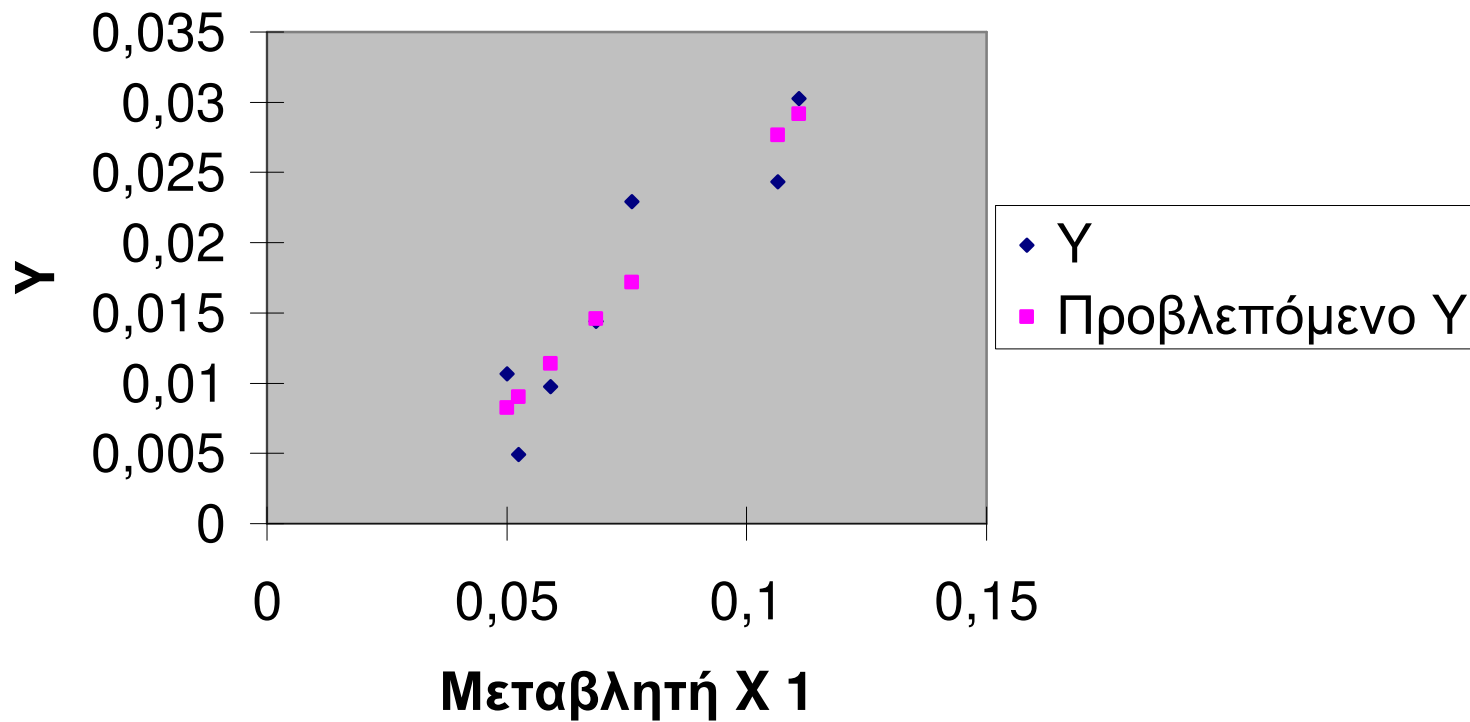
<i>Στατιστικά παλινδρόμησης</i>	
Πολλαπλό R	0,928132998
R Τετράγωνο	0,861430862
Προσαρμοσμένο R Τετράγωνο	0,833717035
Τυπικό σφάλμα	0,003756126
Μέγεθος δείγματος	7

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

	<i>βαθμοί ελευθερίας</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Σημαντικότητα F</i>
Παλινδρόμηση	1	0,000438535	0,000438535	31,08307076	0,002557696
Υπόλοιπο	5	7,05424E-05	1,41085E-05		
Σύνολο	6	0,000509077			

	<i>Συντελεστές</i>	<i>Τυπικό σφάλμα</i>	<i>t</i>	<i>τιμή-P</i>	<i>Κατώτερο 95%</i>	<i>Υψηλότερο 95%</i>	<i>Κατώτερο 95,0%</i>	<i>Υψηλότερο 95,0%</i>
Τεταγμένη επί την αρχή	-0,008993021	0,004830619	-1,86167027	0,121709245	-0,021410523	0,003424482	-0,021410523	0,003424482
Μεταβλητή X 1	0,344165727	0,061731334	5,575219346	0,002557696	0,185480281	0,502851172	0,185480281	0,502851172

Μεταβλητή X 1 Διάγραμμα προσαρμογής γραμμής



11) Έχοντας λάβει ως δείγμα τις παρατηρήσεις: της Σουηδίας 1995 και 2005, της Γερμανίας 2000 και 2002, της Γαλλίας 1995 και της Δανίας 2000 για τον γεωμετρικό μέσο - d_5

Y=d5	X= γεωμετρικός μέσος
0,00522168	0,050059
0,00394674	0,0591736
0,00726406	0,0685443
0,0135757	0,106464
0,0184806	0,110864
0,00199777	0,0523948

ΕΞΟΔΟΣ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΣ

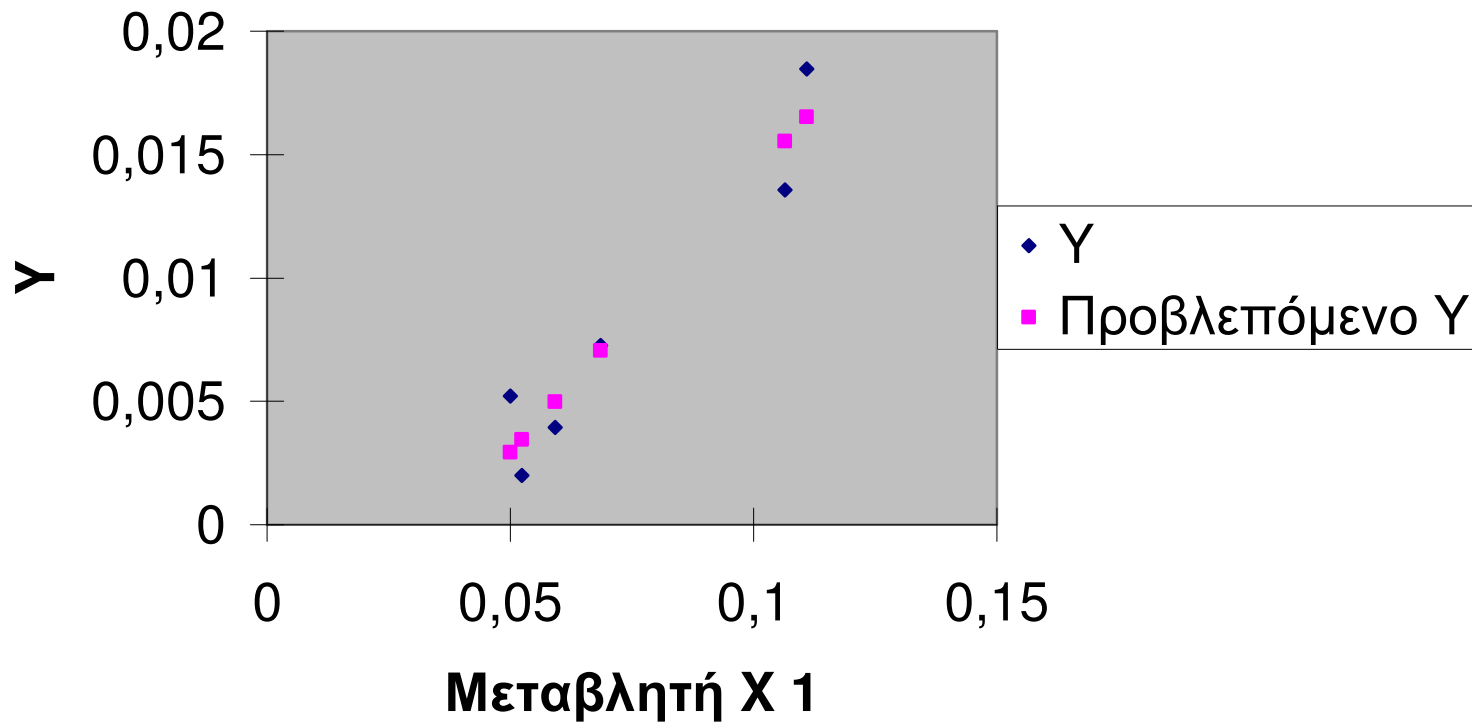
Στατιστικά παλινδρόμησης	
Πολλαπλό R	0,958936588
R Τετράγωνο	0,919559379
Προσαρμοσμένο R Τετράγωνο	0,899449224
Τυπικό σφάλμα	0,002008593
Μέγεθος δείγματος	6

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

	βαθμοί ελευθερίας	SS	MS	F	Σημαντικότητα F
Παλινδρόμηση	1	0,000184479	0,00018448	45,7261203	0,002494685
Υπόλοιπο	4	1,61378E-05	4,0344E-06		
Σύνολο	5	0,000200617			

	Συντελεστές	Τυπικό σφάλμα	t	τιμή-P	Κατώτερο 95%	Υψηλότερο 95%	Κατώτερο 95,0%	Υψηλότερο 95,0%
Τεταγμένη επί την αρχή	-0,008238599	0,002595628	-3,1740298	0,03372736	-0,015445217	-0,001031982	-0,015445217	-0,001031982
Μεταβλητή X 1	0,223280925	0,03301942	6,76210916	0,00249469	0,131604317	0,314957533	0,131604317	0,314957533

Μεταβλητή X 1 Διάγραμμα προσαρμογής γραμμής



12) Έχοντας λάβει ως δείγμα τις παρατηρήσεις: της Γερμανίας 2000 και 2002, της Δανίας 2000 και 2004 και της Γαλλίας 2005 για τα μεγέθη $1/\max(|\Lambda_i|) - d_0$

$Y=d_0$	$X= 1/\max(\Lambda_i)$
0,501937	1,56767
0,485268	1,64054
0,47238	1,75327
0,483394	1,70183
0,419127	1,91403

ΈΞΟΔΟΣ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΣ

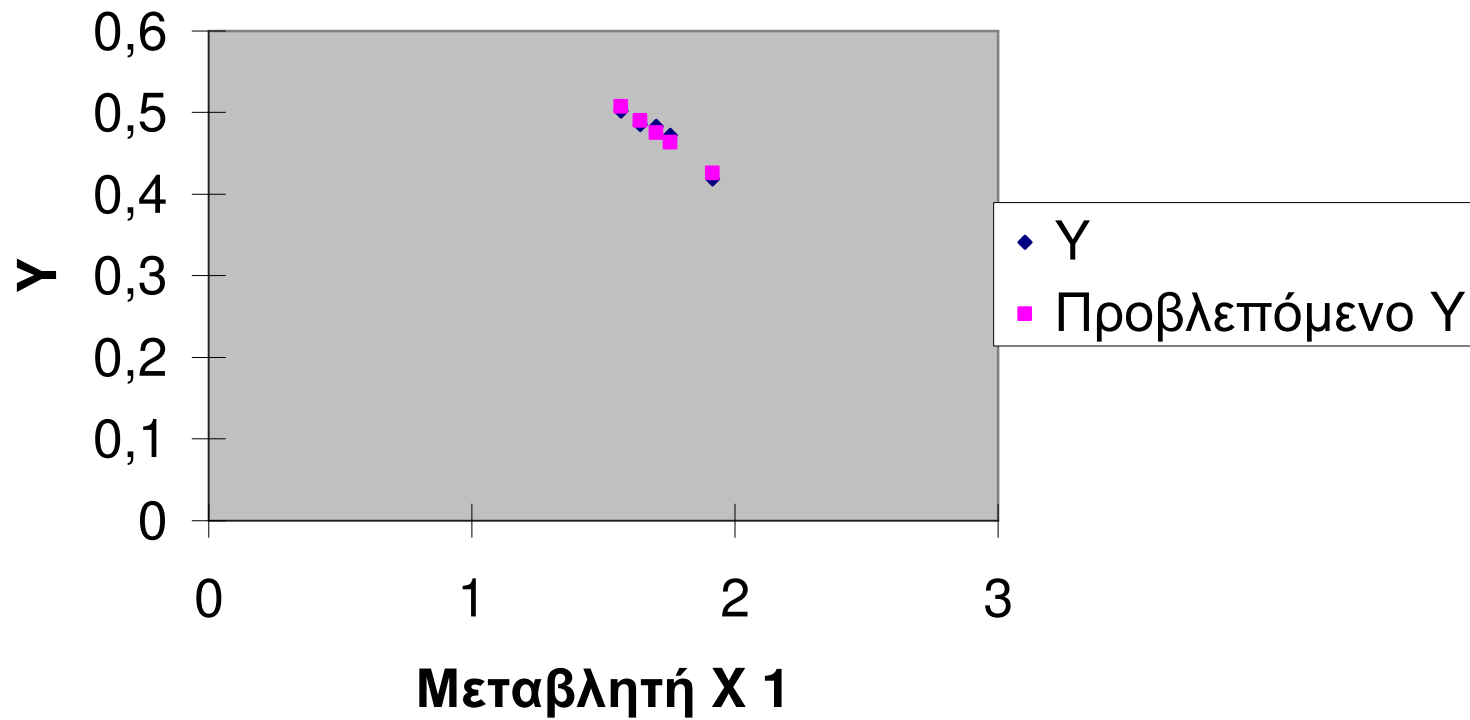
<i>Στατιστικά παλινδρόμησης</i>	
Πολλαπλό R	0,970495669
R Τετράγωνο	0,941861843
Προσαρμοσμένο R Τετράγωνο	0,922482457
Τυπικό σφάλμα	0,008800991
Μέγεθος δείγματος	5

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

	<i>βαθμοί ελευθερίας</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Σημαντικότητα F</i>
Παλινδρόμηση	1	0,003764526	0,003764526	48,60122281	0,006056631
Υπόλοιπο	3	0,000232372	7,74574E-05		
Σύνολο	4	0,003996899			

	<i>Συντελεστές</i>	<i>Τυπικό σφάλμα</i>	<i>t</i>	<i>τιμή-P</i>	<i>Κατώτερο 95%</i>	<i>Υψηλότερο 95%</i>	<i>Κατώτερο 95,0%</i>	<i>Υψηλότερο 95,0%</i>
Τεταγμένη επί την αρχή	0,874574393	0,057819787	15,12586683	0,000627362	0,690566026	1,058582759	0,690566026	1,058582759
Μεταβλητή X 1	-0,234427685	0,033626781	-6,97145772	0,006056631	-0,341443112	-0,127412259	-0,341443112	-0,127412259

Μεταβλητή X 1 Διάγραμμα προσαρμογής γραμμής



13) Έχοντας λάβει ως δείγμα τις παρατηρήσεις: της Σουηδίας 1995, της Γερμανίας 2000 και 2002, της Γαλλίας 2005, της Δανίας 2000 και 2004 και της Φινλανδίας 1995 για τα μεγέθη $1/\max(|\Lambda_i|) - d_5$

$Y=d_5$	$X= 1/\max(\Lambda_i)$
0,0225155	1,56767
0,0184806	1,64054
0,0170774	1,67621
0,013193	1,70183
0,00726406	1,91403
0,0135757	1,75327
0,00522168	1,8814

ΕΞΟΔΟΣ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΣ

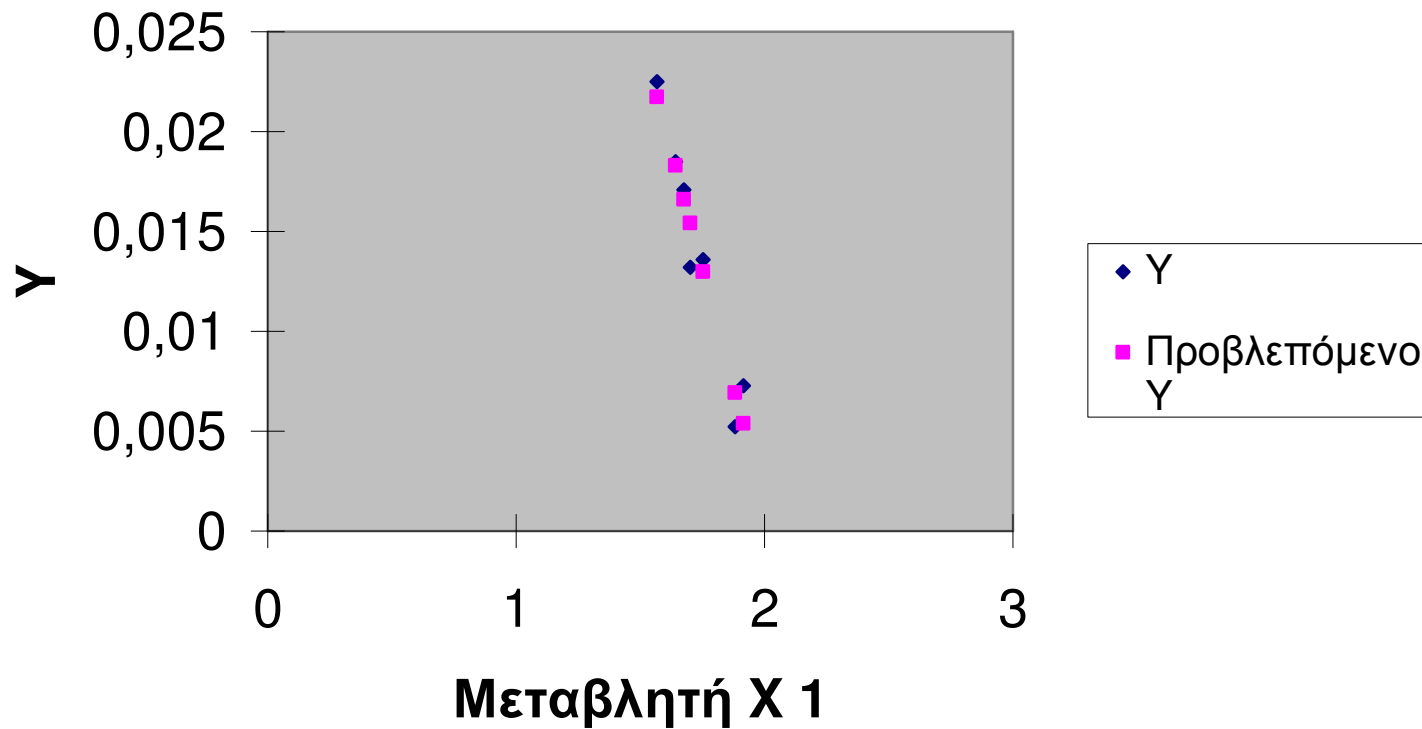
<i>Στατιστικά παλινδρόμησης</i>	
Πολλαπλό R	0,971776715
R Τετράγωνο	0,944349983
Προσαρμοσμένο R Τετράγωνο	0,93321998
Τυπικό σφάλμα	0,001583391
Μέγεθος δείγματος	7

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

	<i>βαθμοί ελευθερίας</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Σημαντικότητα F</i>
Παλινδρόμηση	1	0,000212723	0,000212723	84,84723267	0,000253148
Υπόλοιπο	5	1,25356E-05	2,50713E-06		
Σύνολο	6	0,000225258			

	<i>Συντελεστές</i>	<i>Τυπικό σφάλμα</i>	<i>t</i>	<i>τιμή-P</i>	<i>Κατώτερο 95%</i>	<i>Υψηλότερο 95%</i>	<i>Κατώτερο 95,0%</i>	<i>Υψηλότερο 95,0%</i>
Τεταγμένη επί την αρχή	0,095814608	0,008912564	10,75050979	0,000120703	0,072904132	0,118725083	0,072904132	0,118725083
Μεταβλητή X 1	-0,047249829	0,005129575	-9,21125576	0,000253148	-0,060435822	-0,034063836	-0,060435822	-0,034063836

Μεταβλητή X 1 Διάγραμμα προσαρμογής γραμμής



14) Έχοντας λάβει ως δείγμα τις παρατηρήσεις: της Φινλανδίας 1995, της Γαλλίας 1995 και 2005 και της Γερμανίας 2000 και 2002 για τον γεωμετρικό μέσο και το μέγεθος d-distance

Y= d	X= γεωμετρικός μέσος
0,0120138	0,0467168
0,00657399	0,0591736
0,0284868	0,0760763
0,0344148	0,106464
0,0333122	0,110864

ΕΞΟΔΟΣ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΣ

<i>Στατιστικά παλινδρόμησης</i>	
Πολλαπλό R	0,899554597
R Τετράγωνο	0,809198472
Προσαρμοσμένο R Τετράγωνο	0,745597963
Τυπικό σφάλμα	0,006465386
Μέγεθος δείγματος	5

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

	<i>βαθμοί ελευθερίας</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Σημαντικότητα F</i>
Παλινδρόμηση	1	0,000531843	0,000531843	12,72314453	0,037633529
Υπόλοιπο	3	0,000125404	4,18012E-05		
Σύνολο	4	0,000657247			

	<i>Συντελεστές</i>	<i>Τυπικό σφάλμα</i>	<i>t</i>	<i>πιμή-P</i>	<i>Κατώτερο 95%</i>	<i>Υψηλότερο 95%</i>	<i>Κατώτερο 95,0%</i>	<i>Υψηλότερο 95,0%</i>
Τεταγμένη επί την αρχή	-0,009546959	0,009561141	-0,998516653	0,391616033	-0,039974778	0,02088086	-0,039974778	0,02088086
Μεταβλητή X 1	0,407058706	0,114119489	3,566951714	0,037633529	0,043879561	0,770237852	0,043879561	0,770237852

Μεταβλητή X 1 Διάγραμμα προσαρμογής γραμμής

